WIDERSTANDSINSTABILITÄTEN IN PLASMEN MIT SCHERSTRÖMUNG

Ingo Hofmann

1972

WIDERSTANDSINSTABILITÄTEN IN PLASMEN MIT SCHERSTRÖMUNG

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig - Maximilians - Universität München

vorgelegt von
Ingo Hofmann

München
1972

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Referent: Prof. Dr. D. Pfirsch
2. Referent: Prof. Dr. A. Schlüter

Tag der mündlichen Prüfung: 11.Juli 1972

DISSERTATIONS – und FOTODRUCK FRANK oHG
8000 München 2 · Gabelsbergerstr. 15 · Tel.: 2 80 90 90

Inhaltsverzeichnis

	Seite
A. Einleitung	1
1. Widerstandsinstabilitäten in ruhenden Plasmen	1
2. Der Einfluß von Strömungen auf Instabilitäten	3
3. Analytische Probleme bei der Lösung der Störungsgleichungen für die Tearing-Instabilität	4
B. Grundgleichungen und Gleichgewicht	6
I. Modell	6
II. Gleichgewicht	7
1. Exaktes Gleichgewicht (stationär)	7
2. Quasistationäres Gleichgew icht	9
C. Die Gleichungen der singulären Störungsrechnung	11
I. Form der Störungsgleichungen und Eigenschaften in der komplexen Ebene	11
1. Lineare Störungsgleichungen	11
2. Randbedingungen	13
3. Reibungslose Näherung	14
a. Störungsgleichungen für $\gamma_0 = 0$	14
b. Singularitäten in der komplexen Ebene	14
c. Verzweigungsschnitte und Gültigkeitsbereich der reibungslosen Näherung	15
d. Konturen bei der Berechnung der reibungslosen Lösungen	15
4. Ideale Näherung (dissipationslos)	16
a. Störungsgleichungen für $\eta_0 = 0$	16
b. Singularitäten in der komplexen Ebene	16
c. Verzweigungsschnitte und Integrationskonturen	18

Seite

5. Klassifikation der instabilen Normalschwingungen 18
   a. Widerstands-Moden 18
   b. Ideale Moden 19
   c. Reibungs-Moden 20
   d. Widerstandsmodifizierte Moden 20
6. Konturen bei der Lösung der marginalen Gleichungen. Stabilitätsgrenze 21

II. Lösung der Gleichungen für die Tearing-Moden 23
1."Hydromagnetische Entwicklung"
   a) Formale Reihe und "hydromagnetische Näherung" 23
   b) Singuläre Stellen und Wahl der Integrationskonturen. Konvergenz. 23
   c) Divergente Entwicklung um die singuläre Stelle z_0 24
   d) Erweiterter Konvergenzbereich der "hydromagnetischen Entwicklung". Widerstandsschicht 25
   c) Berechnung der "hydromagnetischen Näherung. Ideale Näherung der Phasengeschwindigkeit. 27
2. Marginale Moden 30
3. Entwicklung in der singulären Schicht (Widerstandsschicht - Entwicklung) 30
   a) Dehnung der unabhängigen Variabeln. Formale Reihe 31
   b) Singuläre Stellen 32
   c) Erweiterter Konvergenzbereich 32
4. Gemeinsamer Konvergenzbereich der hydromagnetischen und der Widerstandsschicht - Entwicklung. Konstruktion der vollständigen Lösung 33
5. Dispersionsrelation 33

III. Der Übergang von Tearing-Moden zu modifizierten Kelvin-Helmholtz-Moden. 34

Seite

D. Tearing-Moden für spezielle Strömungsprofile 35

I. Strömungsgradient in der Widerstandsschicht 35
1. Singuläre Stellen 35
2. Singularitäten der hydromagnetischen Näherung 36
3. Skalierung der unabhängigen Variabeln in der Widerstandsschicht 36
4. Lösung der Störungsgleichungen in der Widerstandsschicht 37
a. nullte Ordnung 37
b. erste Ordnung 38
c. zweite Ordnung 39
d. Konvergenz der formalen Widerstandsschicht-Entwicklung 43
5. Existenz eines gemeinsamen Konvergenzbereiches. Vollständige Lösung 45
6. Dispersionsrelation und Diskussion der Anwachsrate 46
7. Lösung im idealen Bereich. Marginale Moden 48

II. Konstante Strömungsgeschwindigkeit in der Widerstandsschicht. 54
1. Singuläre Stellen 54
2. Singularitäten der hydromagnetischen Näherung 55
3. Skalierung in der Widerstandsschicht 56
4. Lösung der Störungsgleichungen. Konvergenz. Gemeinsamer Konvergenzbereich. 58
5. Dispersionsbeziehung 60
6. Lösung im idealen Bereich. Marginale Moden 61

III. Übergang zu modifizierten Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten 64

Seite

E. Zusammenfassung 65

Literatur 68
Anhang I 69
Anhang II 74
Anhang III 75
Figuren 76

A. Einleitung

1. Widerstandsinstabilitäten in ruhenden Plasmen.

Plasmen in ebenen, zylindrischen oder toroidalen Konfigurationen, die in idealer magnetohydrodynamischer Näherung stabil sind, können bei Einführung einer endlichen elektrischen Leitfähigkeit Instabilitäten aufweisen. Die Anwachsraten dieser "Widerstandsinstabilitäten" verschwinden bei unendlich werdender Leitfähigkeit. Die Theorie liefert 3 Typen solcher Instabilitäten: Tearing-, Rippling- und Austausch - Instabilität. [1] Experimentell direkt beobachtbar ist die Tearing-Instabilität, so z.B. im inversen stabilisierten Pinch [2].
In der vorliegenden Arbeit werden wir uns vor allem dieser Instabilität zuwenden.
Maßgebend für die theoretische Erklärung der Widerstandsinstabilitäten ist die Tatsache, daß sich bei endlicher elektrischer Leitfähigkeit die Magnetfeldlinien nicht mehr mit der Plasmaströmung mitbewegen ("eingefrorenes Magnetfeld") sondern weitgehend frei beweglich sind. Dadurch sind allgemeinere Bewegungen von Plasma und Magnetfeld möglich; insbesondere können topologisch neue Feldlinienbilder entstehen, im Gegensatz zur idealen MHD-Theorie, nach der anfänglich verschiedene Feldlinien weiterhin verschieden bleiben und nur Verbiegungen der Feldlinien erlaubt sind. Bei der Tearing-Instabilität liegt ein Aufbrechen der homogenen Stromschicht in viele parallele Stromfäden bzw. Stromringe vor (Abb.1). Der diese Instabilität treibende Mechanismus liegt in einer Erniedrigung der potentiellen Energie des Magnetfelds. Als Anwachsrate ergibt sich für kleinen Widerstand η_0 :

$$\omega \sim \tau_R^{-3/5}\ \tau_H^{-2/5}\ ,\ \text{wobei}\quad \tau_R = \frac{4\pi L_0^2}{\eta_0}$$

ein Maß für die Diffusionszeit und

$$\tau_H \cong \frac{(4\pi\rho_0)^{1/2}}{B_0} L_0$$

ein Maß für eine hydromagnetische Zeit sind
(L_0: typische Länge, B_0: typisches Magnetfeld, ρ_0 typische Dichte).

Als Maß für die Kleinheit von η_o gilt dabei $\frac{\tau_R}{\tau_H} \gg 1$, was für die meisten experimentellen Plasmen hoher Temperatur erfüllt ist. Die gefährlichen Wellenlängen sind dabei von der Größenordnung $\lambda > L_o$ (siehe [1]).

Zur Lösung der (linearisierten) Störungsgleichungen für Normalschwingungen im ebenen Schichtpinch bei $\eta_o \longrightarrow 0$ wurde in [1] eine "Widerstandsschicht" eingeführt, in der der elektrische Widerstand eine dominierende, destabilisierdende Rolle spielt. Diese Widerstandsschicht ist dort lokalisiert, wo das Gleichgewichtsmagnetfeld verschwindet (Nullebene des Magnetfelds) und somit die Entkopplung von Plasmaströmung und Magnetfeld am stärksten ist. Außerhalb der Widerstandsschicht ist für kleines η_o das Magnetfeld praktisch "eingefroren", d.h., die ideale MHD-Theorie näherungsweise anwendbar. Bei der Überlappung von Lösungen beider Bereiche treten Konvergenzprobleme auf, die in der vorliegenden Arbeit für allgemeinere Situationen ausführlich behandelt werden.
Barston [3] leitete ein notwendiges und hinreichendes Stabilitätskriterium für den ebenen Schichtpinch bei beliebigem Widerstand η_o ab. Er brachte die Störungsgleichungen auf selbstadjungierte Form und diskutierte die Eigenwerte. Dabei ging er von einem exakt zeitunabhängigen Gleichgewicht aus, im Gegensatz zu [1], wo eine (durch η_o bedingte) Diffusion des Gleichgewichtsmagnetfelds zugelassen wurde. Wir werden letzteren Standpunkt einnehmen, da in realistischen "Gleichgewichten" immer Diffusionsvorgänge zu erwarten sind. Für $\eta_o \longrightarrow 0$ sind diese Vorgänge aber wesentlich langsamer als die Anwachsraten der hier interessierenden Instabilitäten, so daß ein quasistationäres Gleichgewicht betrachtet werden kann.
Es sei bemerkt, daß die von Barston angewandte Methode auf statische Gleichgewichte beschränkt ist, da bei Strömungen der Konvektionsterm $(v \cdot \nabla)\, v$ die Störungsgleichungen nicht-selbstadjungiert macht.

2. Der Einfluß von Strömungen auf Instabilitäten

Bisherige Arbeiten über Tearing-Instabilitäten berücksichtigen keine Plasmaströmungen im Gleichgewicht. In experimentellen Plasmen und in der Magnetosphäre [4] treten jedoch im allgemeinen verscherte Strömungen auf, die einen Einfluß auf Instabilitäten haben können. Wir betrachten hier Massenströmungen, die im Rahmen einer Einflüssigkeitstheorie behandelt werden können. Ihr Einfluß auf Tearing-Instabilitäten kann mehrfacher Art sein:

1. Strömungsgradienten liefern selbst einen Mechanismus für Instabilitäten.
2. auf Grund der Verkopplung von Strömung und Magnetfeld wird die Entwicklung von Instabilitäten beeinflußt, die bereits am strömungslosen Gleichgewicht auftreten.
3. Strömungen führen u.U. zu Überstabilität.

Hinsichtlich 1. ist die Kelvin-Helmholtz-Instabilität paralleler Strömungen zu erwähnen [5]. Sie tritt auf, wenn das Geschwindigkeitsprofil einen Sprung bzw. (im stetigen Fall) einen Wendepunkt besitzt. Die diese Instabilität treibende Energie ist dabei die kinetische Energie der Strömung. Reibungsfreie parallele Strömungen ohne Wendepunkt sind stabil. Sie können aber instabil werden durch Einführung einer kleinen Viskosität ν_o. In diesem Fall kommt es zur Bildung einer dünnen "viskosen Schicht", in der die Viskosität eine dominierende, destabilisierende Rolle spielt, und die Kopplung Wirbelstärke-Strömung (typisch für reibungsfreie Strömungen) aufgehoben ist [6]. Dieses Verhalten steht in Analogie zu dem einer MHD-Flüssigkeit mit kleinem Widerstand. In der Tat genügen in idealen, d.h. dissipationslosen Flüssigkeiten Magnetfeld bzw. Wirbelstärke der gleichen Bewegungsgleichung $\frac{\partial}{\partial t} X + (v\nabla) X = (X\nabla) v$.
Erst eine Dissipation η_o bzw. ν_o verändert den Typ dieser Differentialgleichung, so daß die Kopplung $v - X$ gelockert wird. Für eine MHD-Flüssigkeit mit Strömung, wie in dem hier zu untersuchenden Fall, müssen i.a. beide Effekte berücksichtigt werden.

Hinsichtlich 2. sei bemerkt, daß ein homogenes Magnetfeld parallel zur Strömungsrichtung stabilisierend auf die Kelvin-Helmholtz-Instabilität wirkt [5]. Das Auftreten von Überstabilität (3.) hängt mathematisch mit dem nicht-selbstadjungierten Term $(v \cdot \nabla)v$ zusammen.

3. Analytische Probleme bei der Lösung der Störungsgleichungen für die Tearing-Instabilität.

Bei verschertem Magnetfeld und verscherter Strömung im Gleichgewicht haben die idealen Störungsgleichungen ($\nu_o = \eta_o = 0$) für Normalschwingungen Singularitäten für eine Reihe von reellen oder komplexen Werten der Ortsvariabel (es spielt hier nur die z -Komponente eine Rolle, von der alleine die Gleichgewichtsfunktionen abhängen, so daß wir die Störungsgleichungen in der komplexen z-Ebene betrachten). Durch kleine dissipative Terme werden diese Singularitäten geglättet; dennoch verbleiben an diesen Stellen starke Gradienten der Lösungen bzw. deren Ableitungen (Widerstandsschicht bzw. Reibungsschicht). Die dissipativen Terme können dort nicht als klein behandelt werden. Eine einheitliche Entwicklung der Störungen im Sinne einer Reihe in den dissipativen Parametern konvergiert deshalb nicht auf dem ganzen Lösungsintervall, vielmehr treten in jeder Entwicklungsordnung Singularitäten auf, die mit zunehmender Ordnung stärker werden. Deshalb müssen auf geeignet zu definierenden Teilintervallen bzw. Kurvenstücken in der komplexen z-Ebene verschiedenartige Entwicklungen vorgenommen werden, derart, daß die Gesamtheit dieser Kurvenstücke tatsächlich die Randpunkte verbindet. Es wird dabei gezeigt, daß auf jedem dieser Teilintervalle die exakte Lösung in der Form einer gleichmäßig konvergenten Reihe (in i.a. gebrochenen Potenzen von η_o) geschrieben werden kann, so daß jede Partialsumme für $\eta_o \to 0$ eine (auf dem entsprechenden Teilintervall) gleichmäßige Approximation der exakten Lösung darstellt. Die Länge der Teilintervalle hängt dabei von η_o selbst ab.

Somit ist es nicht ausreichend, von vornherein nur die niedrigste Entwicklungsordnung zu betrachten, wie sonst in der regulären Störungsrechnung üblich. Auf diese Problematik wurde in den bisherigen Arbeiten über Widerstands-Instabilitäten - soweit dem Verfasser bekannt - kaum eingegangen. Sie wird deshalb in der vorliegenden Arbeit sowohl für den Fall mit Strömung als auch im strömungslosen Fall genauer untersucht. Schließlich wird für die Tearing-Instabilität bei verscherter Strömung die Dispersionsrelation in niedrigster Ordnung abgeleitet und der Stabilitätsbereich diskutiert.

B. Grundgleichungen und Gleichgewicht

I. Modell

Die analytischen Rechnungen gestalten sich am einfachsten für einen ebenen Schicht-pinch, der in der x - y -Ebene unendlich ausgedehnt ist und in z-Richtung von parallelen leitenden Wänden im Abstand d begrenzt wird ($d \leqq \infty$). Dieses Modell kann als Näherung für den Fall gekrümmter Geometrie angesehen werden, wenn für die Schichtdicke gilt: $d \ll \varrho$, wobei ϱ ein Krümmungsradius ist (z.B. Thetapinch mit Feldumkehr, Magnetopause). Weiterhin machen wir - wie in diesem Fall in der Literatur üblich - von folgenden physikalischen Näherungen Gebrauch:

1. Magnetohydrodynamische Näherung mit endlicher Leitfähigkeit und konstanter Viskosität:

$$\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v\right) = -\nabla P + j \times B + \nu \Delta v \tag{I.1}$$

$$E + v \times B = \eta j \tag{I.2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E \tag{I.3}$$

$$\nabla \times B = 4\pi j \tag{I.4}$$

$$\nabla B = 0 \tag{I.5}$$

2. Inkompressible Flüssigkeit

$$\nabla v = 0 \tag{I.6}$$

Diese Näherung gilt, sofern die Schallgeschwindigkeit groß gegenüber den vorkommenden Strömungs- und Alfvéngeschwindigkeiten ist.

3. Konvektionsgleichung für Störungen des elektrischen Widerstands η :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (v\nabla)\eta = 0 \tag{I.7}$$

4. Kontinuitätsgleichung:

(I.8) $$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (v\nabla)\varrho = 0$$

Eine ausführliche Diskussion dieser Näherungen im Zusammenhang mit Widerstandsinstabilitäten findet sich im Anhang von [1].

Für η nehmen wir an, daß es zwar endlich, aber klein sei. Wie in der Einleitung erwähnt, gilt dabei als Maß für die Kleinheit $\frac{\tau_\varrho}{\tau_H} \gg 1$.

II. Gleichgewicht

Alle Gleichgewichtsfunktionen hängen nur von der Koordinate z senkrecht zum Pinch ab. Magnetfeld und Strömung liegen in der x - y - Ebene:

$$B_o = \{ B_{ox}(z), B_{oy}(z), 0 \}$$

$$V_o = \{ v_{ox}(z), v_{oy}(z), 0 \}$$

$$\varrho_o = \varrho_o(z)$$

$$\eta_o = \eta_o(z) \qquad \text{usf.}$$

1. Exaktes Gleichgewicht (stationär)

Im exakt zeitunabhängigen Fall haben wir die Gleichungen (I. 1-8) mit $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$.

Aus (I.2 - 4) (Gleichgewichtsgrößen mit Index o):
$E_o \equiv$ const.

$$\eta_o \mathfrak{J}_o = \left\{ E_{ox} , E_{oy} , E_{oz} + v_{ox} B_{oy} - v_{oy} B_{ox} \right\}$$

$$\mathfrak{J}_o = (4\pi)^{-1} \left\{ - B_{oy}' , B_{ox}' , 0 \right\}$$

Wegen $\mathfrak{J}_{oz} \equiv 0$ folgt

$$E_{oz} = - \left(v_{ox} B_{oy} - v_{oy} B_{ox} \right) \equiv \text{ const.}$$

Wir werden im folgenden verlangen: $E_{oz} \equiv 0$,
so daß an dem Pinch kein elektrostatisches Potential anliegt. Damit erhalten wir $v_o \parallel B_o$; es sei jedoch bemerkt, daß die Störungsgleichungen von dieser Forderung unabhängig sind.

Ferner:

$$\eta_o^{-1} E_{ox} = - B_{oy}' , \qquad \eta_o^{-1} E_{oy} = B_{ox}'$$

(II.1.1) $\left(\eta_o B_o' \right) \equiv$ const.

Damit ist von den drei Funktionen η_o, B_{ox}, B_{oy} bis auf Konstanten nur noch eine frei wählbar.
Für $\eta_o \equiv$ const. gilt:
$B_{ox}'' \equiv B_{oy}'' \equiv 0$, d.h. B_o linear.
In diesem Spezialfall treten keine Widerstandsinstabilitäten auf (siehe hierzu auch [3]).

Da v_o senkrecht zu ∇p_o und $J_o \times B_o$, folgt aus

(I.1) $\qquad p_o \Delta v_o = 0$, oder

$$v_{ox}' \equiv v_{oy}'' \equiv 0 \quad , \text{ für } p_o \neq 0$$

Ferner:

$$P_o (z)' = (4\pi)^{-1} \left\{ (\nabla \times B_o) \times B_o \right\}_z$$

$$P_o (z) - P_o(0) = - (8\pi)^{-1} B_o^2$$

2. Quasistationäres Gleichgewicht

Aus (I. 2-3) erhalten wir

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla\times(\eta j) + \nabla\times(v\times B)$$

Fordern wir wieder $v_o \parallel B_o$, oder allgemeiner $\nabla\times(v_o \times B_o) = 0$, dann

$$\frac{\partial B_o}{\partial t} = -\nabla\times(\eta_o j_o)$$

Verzichten wir auf (II.1.1), dann erhalten wir ein zeitabhängiges Gleichgewicht mit Diffusion des Magnetfeldes, wobei eine typische Diffusionszeit durch

(II.2.1) $t_D \sim \frac{4\pi}{\eta_o} L_o^2$, $\omega_D \sim \frac{\eta_o}{4\pi L_o^2}$ (L_o typ.Länge, $L_o \sim d$)

gegeben ist.

Von Interesse ist der Fall $\eta_o \equiv$ const., weil dann die Lösung von (I.7) trivial ist, d.h. $\frac{\partial \eta}{\partial t} \equiv 0$; diese Vereinfachung wird im folgenden angenommen.

In realistischen Situationen wird man immer mit einer Diffusion des Gleichgewichtsmagnetfeldes rechnen, so daß nur solche Instabilitäten von Interesse sind, deren Anwachsraten ω wesentlich größer als typische Diffusionsraten ω_D (gemäß (II.2.1)) sind.

Vom Standpunkt solcher Instabilitäten kann dann das Gleichgewicht als zeitlich langsam veränderlich oder quasistationär angesehen werden, d.h., wir werden für die Störungsrechnung die Zeitabhängigkeit des Gleichgewichts vernachlässigen. Dem entspricht eine Vernachlässigung des Ohm'schen Gesetzes (II.1.2) für das Gleichgewicht.

Damit sind $B_o(z)$, η_o, $\varrho_o(z)$, $P_o(0)$ frei vorgebbar. Setzen wir die Viskosität $\nu_o = 0$, dann ist auch v_o frei vorgebbar, abgesehen von $v_o \parallel B_o$. Diese Freiheit in $V_o(z)$ kann aber auch für kleine $\nu_o \neq 0$ angenommen werden, da der Reibungsterm $\nu_o \Delta v_o$ in (I.1) nur zu einer langsamen Zeitabhängigkeit des Gleichgewichts führt, die wir im Rahmen der quasistationären Näherung vernachlässigen können

($\nu_o \ll \frac{B_o^2 L_o}{v_o}$, v_o typische Geschwindigkeit).
Sind a, b (a < b) die Stellen, an denen der Pinch durch Wände begrenzt ist, dann seien $\varrho_o(z)$, $v_o(z)$, $B_o(z)$ auf dem komplexen Gebiet $|\mathrm{Im}\, z| < c$, $a \leqq \mathrm{Re}\, z \leqq b$ analytische Funktionen, d.h., von ihren physikalischen Werten in einen komplexen Streifen hinein fortsetzbar (für $\eta_o \to 0$ genügt ein beliebiges $c > 0$).
Damit die hier vor allem interessierende Tearing-Instabilität existiere, gebe es ein $z_o \in (a,b)$ mit $B_o(z_o) = 0$ oder $k \cdot B_o(z_o) = 0$, wobei k ein Vektor in der $x - y$ - Ebene ist. Unter dem Standardfall verstehen wir wie in [1]:
$B_o = \{\tanh z, 0, 0\}$
Im folgenden sei aber B_o noch beliebig.

C. Die Gleichungen der singulären Störungsrechnung

I. Form der Störungsgleichungen und Eigenschaften in der komplexen Ebene

1. Lineare Störungsgleichungen

Wir führen an dem unter B II.2 eingeführten quasistationären Gleichgewicht $B_0(z)$, $v_0(z)$, $\varrho_0(z)$, η_0 kleine Störungen ein. Für irgendeine Größe ϕ gelte:

$$\phi = \phi_0(z) + \phi_1(x,y,z)$$

Wir nehmen an, daß die Viskosität ν_0 keinen Störungen unterliege.

Da das Gleichgewicht von x,y und t -im Sinne der quasistationären Näherung - unabhängig ist, führen wir hinsichtlich der gestörten Größen eine Fourieranalyse durch:

$$\phi_1(x,y,z) = \phi_1(z)\, \exp\left(i\mathbf{k}r + \omega t\right)$$

$$\mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$$

In die Gleichungen (B.I. 1-6) eingesetzt, erhalten wir in linearer Näherung folgende Differentialgleichungen für die Normalschwingungen:

(I.1.1) $$\varrho_0 \omega v_1 + \varrho_0(v_0\nabla)v_1 + \varrho_0(v_1\nabla)v_0 = -\nabla p_1 + (4\pi)^{-1}\left[(\nabla\times B_0)\times B_1 + (\nabla\times B_1)\times B_0\right] + \nu_0 \Delta v_1$$

(I.1.2) $$\omega B_1 = \nabla\times(v_0\times B_1) + \nabla\times(v_1\times B_0) - (4\pi)^{-1}\nabla\times(\eta_0\nabla\times B_1) - (4\pi)^{-1}\nabla\times(\eta_1\nabla\times B_0)$$

(I.1.3) $$\nabla B_1 = 0 \quad\longrightarrow\quad i(\mathbf{k}B_1) + B'_{1z} = 0$$

(I.1.4) $$\nabla v_1 = 0 \quad\longrightarrow\quad i(\mathbf{k}v_1) + v'_{1z} = 0$$

(I.1.5) $$\omega\eta_1 + v_0\nabla\eta_1 = 0 \quad\longrightarrow\quad \omega\eta_1 + i(\mathbf{k}v_0)\eta_1 = 0$$

(I.1.6) $$\omega\varrho_1 + v_1\nabla\varrho_0 + v_0\nabla\varrho_1 = 0 \quad\longrightarrow\quad \varrho_1 = -\frac{v_{1z}\,\varrho_0'(z)}{\omega + i(\mathbf{k}v_0)}$$

Gleichung (I.1.5) kann nur durch $\eta_1 \equiv 0$ befriedigt werden, außer im trivialen Fall $(k \cdot v_0) \equiv$ const.

Aus (I.1.1-6) erhalten wir nach Elimination des Druckterms folgende Gleichung für v_{1z}, B_{1z}:

(I.1.7) $$-\left[\rho_0(\omega+iG_0)v_{1z}'\right]+i\left[\rho_0 G_0' v_{1z}\right]'+k^2\rho_0(\omega+iG_0)v_{1z}+\nu_0\Delta^2 v_{1z}=i\left[F_0''B_{1z}+k^2F_0B_{1z}-F_0B_{1z}''\right]$$

(I.1.8) $$(\omega+iG_0)B_{1z}=4\pi i F_0 v_{1z}+\eta_0(4\pi)^{-1}\left(k^2B_{1z}-B_{1z}''\right)$$

wobei

$$F_0(z)\equiv(4\pi)^{-1}(k\cdot B_0)\ ,\quad G_0(z)\equiv(k\cdot v_0)$$

Diese beiden Eigenwertgleichungen in v_{1z}, B_{1z} mit dem Eigenwert ω sind für nichtkonstante Strömung i.a. nicht auf selbstadjungierte Form transformierbar (im Gegensatz zu $v_0 \equiv 0$, siehe [3] mit $v_{1z} \equiv \frac{\partial \xi}{\partial t}$). Um diese Eigenwertgleichungen zu lösen, bringen wir sie folgendermaßen auf eine hinsichtlich v_{1z}, B_{1z} symmetrische Form:

$$-\left[\rho_0(\omega+iG_0)v_{1z}'\right]'+i\left[\rho_0 G_0' v_{1z}\right]'\equiv$$

$$-\left[\rho_0^{1/2}(\omega+iG_0)\left(\rho_0^{1/2}v_{1z}\right)'\right]'+\left[\rho_0^{1/2}(\omega+iG_0)\rho_0^{1/2\,\prime}v_{1z}\right]'+$$

$$\left[\left(\rho_0^{1/2}(\omega+iG_0)\right)'\rho_0^{1/2}v_{1z}\right]'-\left[(\rho_0^{1/2})'(\omega+iG_0)\rho_0^{1/2}v_{1z}\right]'\equiv$$

$$-\left[\rho_0^{1/2}(\omega+iG_0)\right]\left(\rho_0^{1/2}v_{1z}\right)''+\left[\rho_0^{1/2}(\omega+iG_0)\right]''\rho_0^{1/2}v_{1z}$$

Mit $D_0(z) \equiv \rho_0^{1/2}(z)\, G_0(z)$

$u \equiv \rho_0^{1/2}(z)\, v_{1z}$

$B \equiv B_{1z}$ (diese Störungen im folgenden ohne Index)

erhalten wir:

(I.1.9) $$\nu_0 \Delta^2 \left(\rho_0^{-1/2} u\right) - \left(\omega \rho_0^{1/2} + i D_0\right) \Delta u + \left(\omega \rho_0^{1/2} + i D_0\right)'' u = -i F_0 \Delta B + i F_0'' B$$

(I.1.10) $$\eta_0 \rho_0^{1/2} (4\pi)^{-1} \Delta B - \left(\omega \rho_0^{1/2} + i D_0\right) B = 4\pi i F_0 u$$

Es sei bemerkt, daß auf Grund der Inkompressibilität die Störungskomponenten v_{1z}, B_{1z} von den dazu senkrechten Komponenten entkoppelt sind. Für diese erhalten wir mit den entsprechenden Komponenten von (I.1.1,2):

(I.1.11) $$\omega \rho_0 \phi + i \rho_0 G_0 \phi + \rho_0 v_{1z} i \left(k_y V_{0x}' - k_x V_{0y}'\right) - \nu_0 \Delta \phi = (4\pi)^{-1} \left[B \, i \left(k_y B_{0x}' - k_x B_{0y}'\right) + i F_0 \psi\right]$$

(I.1.12) $$\omega \psi = i B \left(k_y v_{0x}' - k_x v_{0y}'\right) - i G_0 \psi + 4\pi i F_0 \phi - i v_{1z}' \left(k_y B_{0x}' - k_x B_{0y}'\right) + \eta_0 (4\pi)^{-1} \left(\Delta \psi + i \left(k_y B_{0x}'' - v_{1x} B_{0y}''\right)\right)$$

wobei

$$\phi(z) \equiv i k_y v_{1x}(z) - i k_x v_{1y}(z) = \left(\nabla \times v_1\right)_z$$

$$\psi(z) \equiv i k_y B_{1x}(z) - i k_x B_{1y}(z) = \left(\nabla \times B_1\right)_z = 4\pi j_{1z}$$

Aus den Lösungen ϕ, ψ dieser Gleichungen erhalten wir mittels (I.1.3,4) die gesuchten v_{1x}, v_{1y}, B_{1x}, B_{1y}.

2. Randbedingungen

Wie in der Literatur üblich, gelte die Bedingung unendlich gut leitender Wände nur für die schnell veränderlichen Störungen, nicht aber für das Gleichgewicht, da sonst $E_{o\,tang} = 0$, d.h. $j_{ox} \equiv j_{oy} \equiv 0$.

Weiter nehmen wir an, daß keine Ströme oder Ladungen an der Plasmaoberfläche auftreten und die Wände fest seien. Somit:

$$B_{1z}\,(a) = B_{1z}\,(b) = 0$$

$$v_{1z}\,(a) = v_{1z}\,(b) = 0$$

Für $v_o \neq 0$ hingegen gilt ferner:

$$v_{1x}(a) = v_{1y}(a) = v_{1x}(b) = v_{1y}(b) = 0, \text{ d.h. } \phi\,(a) = \phi\,(b) = 0.$$

3. Reibungslose Näherung

3.a Störungsgleichungen für $\nu_o = 0$

Wir erhalten:

$$(I.3.1)\quad -\left(\omega \varrho_o^{1/2} + i D_o\right)\Delta u + \left(\omega \varrho_o^{1/2} + i D_o\right)'' u = -i F_o \Delta \mathcal{B} + i F_o'' \mathcal{B}$$

$$(I.3.2)\quad \eta_o (4\pi)^{-1} \varrho_o^{1/2} \Delta \mathcal{B} - \left(\omega \varrho_o^{1/2} + i D_o\right)\mathcal{B} = -4\pi i F_o u$$

3.b Singularitäten in der komplexen Ebene

Diese liegen an den Nullstellen des Koeffizienten der höchsten Ableitung:

$$(I.3.3)\quad \omega \varrho_o^{1/2} + i D_o \equiv \varrho_o^{1/2}\left[\omega + i\left(k \cdot v_o(z)\right)\right] = 0$$

Für instabile Moden ist Re $\omega \neq 0$, so daß diese Nullstellen endlichen Abstand von der reellen z-Achse haben und somit reguläre physikalische Lösungen auftreten.
Unter den Nullstellen von (I.3.3) bezeichnen wir jene, die für $\eta_o \varrho \to 0$ (Re $\omega \to 0$) auf die reelle Achse rücken, mit $z_v^{(i)}$ (i = 1 ...). Alle anderen möglichen Nullstellen sind in der Näherung kleiner Dissipation bedeutungslos, da sie die Lösungen auf der reellen Achse nicht beeinflussen. Physikalisch gesehen ist an den Stellen $z_v^{(i)}$ die Phasengeschwindigkeit der Störung gleich der lokalen Strömungsgeschwindigkeit $v_o(z_v^{(i)})$. Um Nullstellen $z_v^{(i)}$ von n.-ter Ordnung (n = 1,2 ...) entwickeln wir (I.3.1): $(z - z_v^{(i)})^n u'' = \text{const.} + O(z - z_v^{(i)})$ (für $u(z_v^{(i)}) \neq 0$). Hieraus resultiert eine Singularität, die für n = 1,2 logarithmischer Natur ist (Abb.2.)

3.c Verzweigungsschnitte und Gültigkeitsbereich der reibungslosen Näherung.

Logarithmische Singularitäten erfordern Verzweigungsschnitte in der komplexen Ebene um eindeutige Lösungen festlegen zu können. Für physikalische Lösungen müssen zu $z_v^{(i)}$ solche Verzweigungsschnitte $S^{(i)}$ eingeführt werden, die die reelle Achse nicht schneiden. (Abb.2)
Sei $U^{(i)}$ eine Umgebung von $z_v^{(i)}$ und $\tilde{U}^{(i)} = U^{(i)} - S^{(i)}$
Dann gilt die reibungslose Grenze einer Reibungs-Lösung - wie aus der Hydrodynamik bekannt - nicht unbedingt in jeder kompakten Teilmenge von $\tilde{U}^{(i)}$ sondern u.U. nur in einem bestimmten Sektor von $\tilde{U}^{(i)}$ (siehe hierzu [7]). Am stärksten eingeschränkt ist dieser Sektor für die "balancierte" Lösung, für die $u(z_v^{(2)}) \neq 0$. Hierzu sei kurz bemerkt, daß die Bewegungsgleichungen mit Reibung in der Hydrodynamik 4 Fundamentallösungen zulassen, von denen zwei in einer bestimmten Richtung (auf der reellen Achse) exponentiell anwachsen, eine - die balancierte - auf der reellen Achse beschränkt bleibt, und eine an der Stelle $z_v^{(i)}$ verschwindet[13]. Letztere Lösung kann in einer vollen Umgebung von $z_v^{(i)}$ durch eine reibungslose Näherung approximiert werden. Der Sektor $T^{(i)}$, in dem die balancierte Lösung von einer reibungslosen Näherung approximiert wird, ist durch die Lage der Stokes- bzw. Antistokeslinien bestimmt. In dem Restsektor $\tilde{U}^{(i)} - T^{(i)}$ hingegen hat die balancierte Lösung für verschwindende Viskosität dominantes (exponentiell zunehmendes) Verhalten. Wir werden später von der reibungslosen Approximation im Sektor $T^{(i)}$ Gebrauch machen.

3.d Konturen bei der Berechnung der reibungslosen Lösungen

Reibungslose Approximationen von Lösungen, die auf der reellen Achse regulär sind, können auf Konturen betrachtet werden, die folgenden Einschränkungen unterliegen:

α) sie müssen punktfremd mit Verzweigungsschnitten sein
β) in der Umgebung der singulären Punkte $z_v^{(i)}$ innerhalb der zulässigen Sektoren verbleiben.
γ) stetig auf die reelle Achse verschiebbar sein, ohne dabei die Singularitäten bzw. Verzweigungsschnitte zu überqueren.

In diesem Sinne berechnete Lösungen sind "korrekt", d.h. sie stellen Näherungen physikalischer Lösungen dar.
Im folgenden werden solche reibungslosen "korrekten" Lösungen untersucht.

4. Ideale Näherung (dissipationslos)

4.a Störungsgleichungen für $\eta_o = 0$

Wir erhalten aus (I 1.9-10):

I.4.1) $$-\left(\omega \varrho_o^{1/2} + i D_o\right) \Delta u + \left(\omega \varrho_o^{1/2} + i D_o\right)'' u = -i F_o \Delta \mathcal{B} + i F_o'' \mathcal{B}$$

I.4.2) $$\left(\omega \varrho_o^{1/2} + i D_o\right) \mathcal{B} = 4\pi i F_o u$$

4.b Singularitäten in der komplexen Ebene

Um die Lage der Singularitäten, die durch die Vernachlässigung des Widerstands zusätzlich auftreten, zu erhalten, eliminieren wir u:

(I.4.3) $$u = \frac{\omega \varrho_o^{1/2} + i D_o}{4\pi i F_o} \mathcal{B}$$

(I.4.4) $$\left[\left(\omega \varrho_o^{1/2} + i D_o\right) + 4\pi F_o^2\right] F_o \mathcal{B}'' + 2\left(\omega \varrho_o^{1/2} + i D_o\right) F_o^2 \left(\frac{\omega \varrho_o^{1/2} + i D_o}{F_o}\right)' \mathcal{B}' +$$
$$+ \left[\left(\omega \varrho_o^{1/2} + i D_o\right) F_o^2 \left(\frac{\omega \varrho_o^{1/2} + i D_o}{F_o}\right)'' - \left(\omega \varrho_o^{1/2} + i D_o\right)'' F_o \left(\omega \varrho_o^{1/2} + i D_o\right)\right.$$
$$\left. - 4\pi k^2 F_o^3 - 4\pi F_o^2 F_o''\right] \mathcal{B} = 0$$

Sei die Neutralebene des Magnetfeldes bei z_o, d.h. $F_o(z_o)=0$. Entwickeln wir (I.4.4) um z_o, dann erhalten wir mit $\tau = z-z_o$ eine Gleichung von folgendem Typ, wobei nur die führenden Potenzen von z mitgenommen werden:

$$\tau \frac{d^2B}{d\tau^2} - 2\frac{dB}{d\tau} + \frac{2}{\tau} B = 0$$

Schließen wir $B(z_o) = 0$ aus, dann ist eine Lösung der Art $B = \sum_{i=0...} c_i \tau^i$ nicht möglich, vielmehr muß ein logarithmischer Term mitgenommen werden, z.B. $B = 1 + \frac{2}{3} \cdot \ln\tau + ...$

Diese logarithmische Singularität hängt mit der Vernachlässigung des elektrischen Widerstandes zusammen. Wir bezeichnen deshalb die Stelle z_o mit $z_w^{(o)}$.
Weitere singuläre Stellen logarithmischer Art treten auf für

$$\left(\omega \rho_o^{1/2} + i D_o\right)^2 + 4\pi F_o^2 \equiv \rho_o\left[\left(\omega + i(kv_o)\right)^2 + \frac{(kB_o)^2}{4\pi\rho_o}\right] = 0 \qquad (I.4.5)$$

An diesen Stellen entwickelt, ist die Differentialgleichung (I.4.4) vom Typ $\tau B'' + ... = B + ...$ und damit die Lösung $B = 1 + \tau \ln\tau + ...$
Wir benötigen wiederum nur diejenigen Singularitäten, die für $\mathrm{Re}\,\omega \to 0$ auf die reelle Achse rücken und bezeichnen diese Stellen mit $z_w^{(j)}$ (j=1 ...). Alle übrigen Nullstellen von (I.4.5) in der komplexen Ebene beeinflussen die Lösung auf der reellen Achse für $\eta_o \to 0$ nicht.
Physikalisch gesehen bedeutet $z_w^{(o)}$ eine Nullstelle der Alfvéngeschwindigkeit $v_A^2 = \frac{B_o^2}{4\pi\rho_o}$, ferner $z_w^{(j)}$ (j = 1 ...) Gleichheit der Alfvén- und Strömungsgeschwindigkeiten im Bezugssystem der Störung.
Wir werden später zeigen, daß für die Tearing-Instabilität zwei der $z_w^{(j)}$ (j = 1,2) in der Nähe von $z_w^{(o)}$ liegen (für $\mathrm{Re}\,\omega \to 0$: $z_w^{(1,2)} \to z_w^{(o)}$).
Dies bedeutet, daß für diese Moden bei kleinem η_o im Bezugssystem der Störung die Strömungsgeschwindigkeit an der gleichen Stelle wie die Alfvéngeschwindigkeit verschwindet, d.h. die Störung der Feldlinien breitet sich mit der lokalen Strömungsgeschwindigkeit aus.

4.c Verzweigungsschnitte und Integrationskonturen

In Abb.3 wird die Lage der Singularitäten $z_w^{(j)}$ und der zugehörigen Verzweigungsschnitte für einige Fälle angegeben.
Die Verteilung der $z_w^{(j)}$ weist bereits darauf hin, in welchen Fällen eine ideale Näherung für Normalschwingungen unmöglich ist. Dies gilt im Fall a), in dem kein "korrekter" Weg (d.h. ein Weg, der stetig auf die reelle Achse verschoben werden kann, ohne dabei Singularitäten zu überqueren) möglich ist, auf dem für $\mathrm{Re}\,\omega \to 0$ ($\eta_o \to 0$) eine reguläre ideale Lösung existiert. In der Nähe von $z_w^{(o)}$ muß dann die volle Gleichung mit Widerstand gelöst werden.
Anders ist die Situation im Fall c), wo ein solcher Weg existiert. Ob auf ihm tatsächlich die Randbedingungen erfüllt werden können, hängt natürlich noch von den speziellen B_o und v_o - Profilen ab.
Für die Wahl der zulässigen Integrationskonturen gelten somit wieder alle unter I.3.d gemachten Feststellungen.

I.5. Klassifikation der instabilen Normalschwingungen

Die Lage der Singularitäten $z_v^{(i)}$ und $z_w^{(j)}$ ist maßgebend für die Natur der auftretenden Lösungen. Obwohl bei willkürlichem $v_o(z)$ bzw. $D_o(z)$ mehrere Singularitäten jeder Art auftreten, spielen nicht alle eine gleich wichtige Rolle, wie im folgenden gezeigt wird.
Für das vorliegende Modell mit einer Neutralschicht des Magnetfelds ($F_o(z_w^{(o)}) = 0$) unterscheiden wir zwischen Moden, die die Topologie des Magnetfelds ändern ($B(z_w^{(o)} \neq 0$) und solchen, die sie unverändert lassen ($B(z_w^{(o)} = 0$).

5.a Widerstands-Moden

Für $B(z_w^{(o)}) \neq 0$ tritt nach C.I.4.b in der Lösung der idealen Gleichung bei $z_w^{(o)}$ eine Singularität auf. Deshalb muß für $\eta_o \to 0$ die Anwachsrate solcher Moden verschwinden.

Wegen $B(z_w^{(o)}) \neq 0$ werden die ursprünglich antiparallelen Feldlinien über die Nullebene verbunden, so daß ein (topologisch) neues Feldlinienbild entsteht:
es bilden sich lokale Strompinche, durch die der Schichtpinch zerfällt. Diese Instabilität wird als Tearing-Mode bezeichnet (Abb.1). Ihre Phasengeschwindigkeit stimmt mit der Gleichgewichtsströmungsgeschwindigkeit des Plasmas in der Nullebene überein (siehe hierzu I.6). Die Viskosität kann so klein gewählt werden, daß ihr Einfluß auf diese Moden von höherer Ordnung ist. Dies ist möglich, weil die Integrationskontur immer so gelegt werden kann, daß die $z_v^{(i)}$ - nur in deren Umgebung wirkt sich kleine Viskosität aus - endlichen Abstand von ihr haben.

5.b Ideale Moden ($\eta_o \equiv \gamma_o \equiv 0$)

Es gilt jetzt $B(z_w^{(o)}) = 0$. Für $\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$ liegen auf der reellen Achse keine Singularitäten. Die Existenz instabiler Moden hängt von der speziellen Form der Gleichgewichtsfunktionen v_o, B_o, ρ_o und der Randbedingungen ab.
Wir können zwischen Moden unterscheiden, die auch bei verschwindender Strömung bestehen (MHD-Moden) und solchen, die auch bei verschwindendem Magnetfeld vorhanden sind (hydrodynamische Moden):

α) MHD-Moden
Für $D_o \equiv 0$ treten in der Nähe von z_o zwei Singularitäten $z_w^{(1)}$, $z_w^{(2)}$ auf (siehe (I.4.5)).
Für einen ebenen Schichtpinch ohne Gravitation und Randbedingung B = 0 existieren in diesem Fall bekanntlich keine instabilen Moden. Bei Zylindersymmetrie können hingegen Instabilitäten auftreten (Sausage-, Kinkinstabilitäten).

β) hydrodynamische Moden (HD-Moden)
Für $F_o \equiv 0$ verbleiben die Singularitäten $z_v^{(i)}$ (siehe (I.3.3)).
Ein instabiler Mode existiert nur, wenn D_o einen Wendepunkt hat (Wendepunkts-Kriterium für Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten, [5], [6]).

β) Modifikation durch $v_o(z)$ bzw. $B_o(z)$.
Für $F_o \neq 0$, $D_o \neq 0$ geben die marginalen Gleichungen i.a. Aufschluß über das Vorhandensein instabiler Moden.
Ein schwaches konstantes Magnetfeld wirkt sich i.a. stabilisierend auf instabile HD-Moden aus, da es mit der Strömung verkoppelt ist (eingefrorenes Magnetfeld) und sich einer Verbiegung der Feldlinien widersetzt [8].
Instabile MHD-Moden können durch kleine Strömungen stabilisiert [9], aber auch destabilisiert werden.
Der Übergang von modifizierten HD-Moden zu MHD-Moden wird charakterisiert durch den Wechsel von singulären Stellen aus der oberen in die untere z-Halbebene (bzw.umgekehrt). Hierzu beachten wird, daß durch ein kleines B_o in der Nachbarschaft einer viskosen Singularität z_v zwei Widerstands-Singularitäten $z_w^{(1)}$, $z_w^{(2)}$ auftreten (gemäß (I.4.5), siehe Abb.4).
Andererseits werden die ohne Strömung vorhandenen Singularitäten $z_w^{(1)}$, $z_w^{(2)}$ durch ein infinitesimales verschoben, und es kommt eine Singularität z_v hinzu (gemäß (I.3.3), siehe Abb.5). Beide Situationen gehen dadurch ineinander über, daß $z_w^{(1)}$ über den Punkt ∞ in die untere Halbebene wandert ($(\omega\varrho_o^{1/2} + i D_o)^2 \to -4\pi F_o^2 / z=z_w^{(1)}$).

5.c Reibungs-Moden

Hat $D_o(z)$ keinen Wendepunkt, dann treten instabile hydrodynamische Moden nur auf, wenn die Viskosität berücksichtigt wird. In diesem Fall müssen für $\nu_o \to 0$ in einer Schicht um die Stellen $z_v^{(i)}$ die vollen reibungsabhängigen Gleichungen gelöst werden [6].

5.d Widerstandsmodifizierte Moden

Für ideale Instabilitäten haben die Singularitäten $z_w^{(j)}$ endlichen Abstand von der reellen Achse. Da sich ein kleiner elektrischer Widerstand nur in der Nähe dieser Singularitäten auswirkt, ist sein Einfluß auf die idealen Instabilitäten daher von höherer Ordnung.

Dies gilt nicht mehr für Reibungs-Moden mit kleiner Viskosität, da für $\mathrm{Re}\,\omega \to 0$ einige der Singularitäten $z_w^{(j)}$ "näher" an der reellen Achse liegen als die viskosen Singularitäten $z_v^{(i)}$ (siehe hierzu unter D). In diesem Fall muß eine geeignete Skalierung beider Parameter η_0 und ν_0 durchgeführt werden.

I.6 Konturen bei der Lösung der marginalen Gleichungen Stabilitätsgrenze

Die Differentialgleichungen für den marginalen Mode ($\mathrm{Re}\,\omega = 0$) können auf jeder Kontur Γ in der komplexen Ebene gelöst werden, wenn Γ die Randpunkte (a,b) untereinander verbindet und auf die reelle Achse verschoben werden kann, ohne dabei Singularitäten der zugehörigen instabilen Mode ($\mathrm{Re}\,\omega > 0$) zu überqueren. Wir bezeichnen solche Integrationswege $\Gamma_{a\,b}$ als "physikalische" Konturen, da sie zu Moden führen, die für reelle, d.h. physikalische z durch analytische Festsetzung von ihren Werten auf Γ_{ab} erhalten werden.
Auch auf Konturen Γ, die nicht "physikalisch" sind, können die marginalen Gleichungen Lösungen besitzen; sie bekommen aber erst physikalische Bedeutung, wenn die zwischen Γ und der reellen Achse liegenden Singularitäten durch dissipative Terme weggeschafft werden.
Sei $(\tilde{B}, \tilde{v})$ eine Lösung der zu (I.1.10,11) gehörigen marginalen Gleichungen. Für $\nu_0 \neq 0$, $\eta_0 \neq 0$ stellen diese ein Eigenwertproblem in k_0 dar, das nur für ein bestimmtes ω_0 ($\mathrm{Re}\,\omega_0 = 0$) lösbar ist, wobei $\Gamma_{a\,b}$ beliebig ist:

$$k_0 = k_0(\nu_0, \eta_0) \; ; \quad \omega_0 = \omega_0(\nu_0, \eta_0) \; ,$$

oder für kleine ν_0, η_0

$$k_0 = k_0^{(0)} + \frac{\partial k_0}{\partial \nu_0}\,\delta\nu_0 + \frac{\partial k_0}{\partial \eta_0}\,\delta\eta_0 + \ldots \qquad (6.1)$$

(I.6.2) $$\omega_0 = \omega_0^{(0)} + \frac{\partial \omega}{\partial \gamma_0}\,\delta\gamma_0 + \frac{\partial \omega}{\partial \eta_0}\,\delta\eta_0 + \dots$$

Im allgemeinen ist $k_0^{(0)} \neq 0$, so daß es bereits ausreichende Information über die Stabilitätsgrenze liefert (außer z.B. für reine Reibungs-Moden, bei denen $k_0^{(0)} = 0$, siehe [6]). $k_0^{(0)}$ genügt den Gleichungen

(I.6.3) $$-\tilde{D}_0\,\Delta\tilde{u} + \tilde{D}_0''\,u' = -F_0\,\Delta\tilde{B} + F_0''\,\tilde{B}$$

(I.6.4) $$\tilde{D}_0\,\tilde{B} = 4\pi F_0\,\tilde{u}$$

$$\tilde{D}_0 = D_0 - i\omega_0^{(0)}\rho_0^{1/2}(z) \equiv \left(G_0 - i\omega_0^{(0)}\right)\rho_0^{1/2}$$

$$\Delta \equiv \frac{d^2}{dz^2} - k_0^{(0)2}$$

Auf der reellen Achse auftretende Singularitäten können durch eine geeignete "physikalische" Kontur a b umgangen werden. Aus (I.6.3,4) erhalten wir:

(I.6.5) $$\tilde{u} = \frac{\tilde{D}_0}{4\pi F_0}\,\tilde{B}$$

$$-\frac{\tilde{D}_0^2}{4\pi F_0}\,\Delta\tilde{B} - 2\tilde{D}_0\left(\frac{\tilde{D}_0}{4\pi F_0}\right)'\tilde{B}' - \tilde{D}_0\left(\frac{\tilde{D}_0}{4\pi F_0}\right)''\tilde{B} + \tilde{D}_0''\,\frac{\tilde{D}_0}{4\pi F_0}\,\tilde{B} = F_0\,\Delta\tilde{B} + F_0''\,\tilde{B}$$

(I.6.6) $$\left(4\pi F_0^2 - \tilde{D}_0^2\right)\Delta\tilde{B} - 2\tilde{D}_0 F_0\left(\frac{\tilde{D}_0}{F_0}\right)'\tilde{B}' - \tilde{D}_0 F_0\left(\frac{\tilde{D}_0}{F_0}\right)''\tilde{B} + \tilde{D}_0''\tilde{D}_0\,\tilde{B} - 4\pi F_0 F_0''\tilde{B} = 0$$

oder in $\tilde{u}$:

(I.6.7) $$\left(\tilde{D}_0^2 - 4\pi F_0^2\right)\Delta\tilde{u} - 8\pi F_0\,\tilde{D}_0\left(\frac{F_0}{\tilde{D}_0}\right)'\tilde{u}' - 4\pi F_0\,\tilde{D}_0\left(\frac{F_0}{\tilde{D}_0}\right)''\tilde{u} + 4\pi F_0'' F_0\,\tilde{u} - \tilde{D}_0\tilde{D}_0''\tilde{u} = 0$$

Für Moden, bei denen $B(z_0) \neq 0$ (Widerstandsmoden) lösen wir zweckmäßig das Eigenwertproblem (I.6.6); ist hingegen $u(z_0) \neq 0$, so lösen wir (I.6.7). Der Eigenwert wird bestimmt durch den Verlauf von F_0 und D_0, d.h. Magnetfeldenergie und Strömungsenergie.

C.II. Lösung der Gleichungen für Tearing-Moden

Wir suchen eine Lösung der reibungslosen Gleichungen (I.3.1-2) mit $\mathrm{Re}\,\omega > 0$ für $\eta_0 \to 0$ und $B(z_0) \neq 0$ (Tearing-Mode). Dabei setzen wir voraus, daß für $\eta_0 = 0$ kein instabiler Mode existiere, d.h. die Strömungsgradienten genügend klein sind. Wir nehmen weiter an, daß gilt $\mathrm{Re}\,\omega \gg \eta_0$ für $\eta_0 \to 0$, da nur solche Moden gegenüber der Magnetfelddiffusion in Erscheinung treten.

1. "Hydromagnetische Entwicklung" (HME).

1.a Formale Reihe und "hydromagnetische Näherung"

Wir entwicklen B, u in den kleinen Parametern η_0, $\tilde{\omega}$ wobei $\tilde{\omega} = \omega(\eta_0, k) - \omega_0$, $\omega_0 = \lim_{\eta_0 \to 0} \omega(\eta_0, k)$ (diese Entwicklung gilt nicht für $k \to 0$, da dann die Terme in η_0, $\tilde{\omega}$ u.U. nicht mehr klein gegenüber den k-abhängigen Termen sind).

$$\text{(II.1.1)} \qquad \mathcal{B} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \tilde{\omega}^n \eta_0^m \mathcal{B}^{(n)(m)} = \mathcal{B}^{(0)} + \tilde{\omega}\,\mathcal{B}^{(1)} + \dots$$

$$\text{(II.1.2)} \qquad u = \sum_{n,m=0}^{\infty} \tilde{\omega}^n \eta_0^m u^{(n)(m)} = u^{(0)} + \tilde{\omega}\,u^{(1)} + \dots$$

Die $u^{(n)(m)}$, $B^{(n)(m)}$ genügen jeweils den Randbedingungen. Da die beiden führenden Terme $B^{(0)}$, $B^{(1)}$ in dieser Entwicklung nicht vom Widerstand abhängen, bezeichnen wir (II.1.1-2) als"hydromagnetische Entwicklung"(HME). Die Teilreihen $B^{(0)} + \tilde{\omega}\,B^{(1)}$ bzw. $u^{(0)} + \tilde{\omega}\,u^{(1)}$ bezeichnen wir - falls endlich - als "hydromagnetische Näherung".

1.b Singuläre Stellen und Wahl der Integrationskonturen. Konvergenz

Da die HME an den Stellen $z_v^{(i)}$, $z_w^{(j)}$ in jeder Ordnung divergiert (siehe hierzu D.I.2, D.II.2), darf sie nur auf einer Kontur $\Gamma_{a\,b}^{*}$ betrachtet werden, die auf die reelle Achse verschoben werden kann, ohne daß dabei die-

se Singularitäten überquert werden.
Für kleine $|\tilde{\omega}|$, η_o konvergieren dann die Reihen (II.1.1-2) gleichmäßig für alle z mit $|z-z_v^{(i)}| \geqq \delta_v^{(i)}$, $|z - z_w^{(j)}| \geqq \delta_w^{(j)}$ ($\delta_v^{(i)}$, $\delta_w^{(j)}$ > 0, i = 1 ..., j = 1 ...).
Da für $\eta_o \to 0$, $\tilde{\omega} \to 0$ die Widerstandssingularitäten $z_w^{(1)}$, $z_w^{(2)}$ gegen $z_w^{(o)}$ wandern, folgt, daß $\Gamma^*_{a\,b}$ durch $z_w^{(o)}$ gehen muß und die Konvergenz der HME nur für $|z - z_w^{(o)}| \geqq \delta$ gesichert ist. In $|z - z_w^{(o)}| < \delta$ ist dann die hydromagnetische Näherung nicht mehr zulässig.

Hat $F_o(z)$ außer $z_w^{(o)}$ keine weiteren Nullstellen,dann kann $\Gamma^*_{a\,b}$ immer so gelegt werden, daß es endlichen Abstand von den restlichen Nullstellen $z_w^{(j)}$ (j = 1) bzw. $z_v^{(i)}$ (i = 1 ...) hat, falls diese einfach sind (siehe Abb.6).
Für $z \in \Gamma^*_{a\,b}$ und $|z - z_w^{(o)}| > \delta$ konvergieren dann die Reihen (II.1.1,2) gleichmäßig, da dort die Koeffizientenfunktionen der Differentialgleichungen nach oben und unten beschränkt sind. Jede Teilreihe von (II.1.1,2), insbesondere also die hydromagnetische Näherung, approximiert dort die exakte Lösung gleichmäßig für $\eta_o \to 0$, $\mathrm{Re}\,\omega \to 0$. Die Hauptschwierigkeit liegt nun in einer Lösung, die in $|z - z_w^{(o)}| \leqq \delta$ gültig ist.

1.c Divergente Entwicklung um die singuläre Stelle $z_w^{(o)} = 0$.

Entwickeln wir die Funktionen $B^{(n)(m)}$, $u^{(n)(m)}$ um $z_w^{(o)}$, dann erhalten wir Laurentreihen in $(z - z_w^{(o)})$.
Die Koeffizienten der Laurententwicklung für $z - z_w^{(o)} > 0$ müssen i.a. unabhängig von denen der Entwicklung für $z - z_w^{(o)} < 0$ berechnet werden, da eine analytische Festsetzung über den Punkt $z_w^{(o)}$ i.a. nicht möglich ist.
Durch die Randbedingungen bei a bzw. b werden diese Koeffizienten für die jeweiligen ω, η_o, k festgelegt. Somit sind die Reihen (II.1.1,2) als Multireihen in $\tilde{\omega}$, η_o, $(z-z_w^{(o)})$ aufzufassen.

Um die Dispersionsbeziehung $\omega(\eta_o, k)$ zu gewinnen, müßten in der HME alle divergenten Terme aufsummiert werden, da die Ordnung der Pole mit zunehmendem (n)(m) höher wird (siehe II.1.d). Diese Schwierigkeit umgehen wir durch Einführung einer anderen Entwicklung in der Umgebung von $z_w^{(o)}$ (siehe II.3).

1.d Erweiterter Konvergenzbereich der "hydromagnetischen Entwicklung". Widerstandsschicht.

Für $\eta_o \to 0$ bleibt der Einfluß des Widerstands auf eine Schicht verschwindender Dicke um $z_w^{(o)}$ beschränkt, wie Gleichung (I.3.2) zeigt. Es ist zu erwarten, daß die HME für $\eta_o \to 0$ auf $\Gamma^*_{a\,b}$ nicht nur außerhalb $|z - z_w^{(o)}| \geqslant \delta$, mit δ unabhängig von η_o, konvergiert. In der Tat können wir zeigen, daß für $\eta_o \to 0$ gilt $\delta \sim \eta_o^q$ (mit $o < q < 1$), so daß die Reihen (II.1.1,2) auch für dieses $\delta(\eta_o)$ noch gleichmäßig konvergieren.

Die Existenz eines solchen erweiterten Konvergenzbereiches (also auch Gültigkeitsbereiches der hydromagnetischen Näherung) erweist sich in II.4. als Voraussetzung für die Konstruktion einer vollständigen (auf ganz $\Gamma^*_{a\,b}$ gültigen) Lösung.

Wir geben nun eine Abschätzung für die Ordnung der Pole der $B^{(n)(m)}$ bzw. $u^{(n)(m)}$ an. Hierzu betrachten wir in (I.3.1,2) den Übergang $\tilde{\omega}^n \eta_o^m \to \tilde{\omega}^{n+1} \eta_o^m$ (beachte, daß $|\tilde{\omega}| \gg \eta_o$):

(II.1.3) $$\rho_o^{1/2} \Delta u^{(n)(m)} - i \tilde{D}_o u^{(n+1)(m)} + \rho_o^{1/2} u^{(n)(m)} + i \tilde{D}_o u^{(n+1)(m)} = - i F_o \Delta B^{(n+1)(m)} + i F_o B^{(n+1)(m)}$$

(II.1.4) $$\frac{\rho_o^{1/2}}{4\pi} \Delta B^{(n+1)(n-1)} - i \rho_o^{1/2} B^{(n)(m)} - i \tilde{D}_o B^{(n+1)(m)} = - 4\pi i F_o u^{(n+1)(m)}$$

$$F_o = f_1 (z - z_w^{(o)}) + \dots$$

$$\tilde{D}_o = \tilde{d}_o + d_1 (z - z_w^{(o)}) + \dots$$

Wir erhalten ein konsistentes Entwicklungsschema, wenn wir annehmen, daß

$$\frac{u^{(n+1)(m)}}{u^{(n)(m)}} \lesssim O\left(\frac{1}{z - z_w^{(o)}}\right), \qquad \frac{B^{(n+1)(m)}}{B^{(n)(m)}} \lesssim O\left(\frac{1}{z - z_w^{(o)}}\right)$$

$$\frac{u^{(n+1)(m)}}{u^{(n+1)(m-1)}} \lesssim O\left(\frac{1}{(z - z_w^{(o)})^3}\right), \qquad \frac{B^{(n+1)(m)}}{B^{(n+1)(m-1)}} \lesssim O\left(\frac{1}{(z - z_w^{(o)})^3}\right)$$

Dies bedeutet, daß sich für $n \to n+1$ die Ordnung des stärksten Pols in den Reihen $B^{(n)(m)}$, $u^{(n)(m)}$ höchstens um 1 erhöht; für $m \to m+1$ hingegen erhöht sich die Ordnung höchstens um 3. Um eine Abschätzung zu erhalten, betrachten wir (II.1.3,4) für die nullte Ordnung:

(II.1.5) $$-i\,\tilde{D}_o\,\Delta u^{(o)} + i\,\tilde{D}''\,u^{(o)} = -i F_o \Delta B^{(o)} + i F_o B^{(o)}$$

(II.1.6) $$\tilde{D}_o B^{(o)} = \text{Im}\, F_o\, u^{(o)}$$

Wie man sieht, kann für $|z - z_w^{(o)}| \to 0$ kein Pol auftreten, sondern höchstens eine logarithmische Singularität $u^{(o)} \sim (z - z_w^{(o)}) \ln (z - z_w^{(o)})$,
d.h. $u^{(o)} \lesssim O(1)$

$B^{(o)} \lesssim O(1)$

(siehe hierzu auch II.1.e)
Es folgt, daß für $|z - z_w^{(o)}| \to 0$ gilt:

$$B^{(n)(m)} \lesssim O\left(\frac{1}{z^{n+3m}}\right)$$

$$u^{(n)(m)} \lesssim O\left(\frac{1}{z^{n+3m}}\right)$$

Haben wir $|z - z_w^{(o)}| \gtrsim \delta \quad (\delta > 0)$, dann erhalten wir für den Term der Ordnung (n)(m):

$$|\tilde{\omega}^n \eta_o^m \mathfrak{B}^{(n)(m)}| \lesssim O\left(\left(\frac{|\tilde{\omega}|}{\delta}\right)^n \left(\frac{\eta_o}{\delta^3}\right)^m\right)$$

Die HME (II.1.1,2) konvergiert also gleichmäßig für $\eta_o \to 0$ und $|z - z_w^{(o)}| \geqq \delta(\eta_o) \to 0$, wenn gilt:

(II.1.7) $$\frac{|\tilde{\omega}|}{\delta(\eta_o)} \to 0 \quad , \quad \frac{\eta_o}{\delta(\eta_o)^3} \to 0 \qquad (\eta_o \to 0)$$

Das optimale δ wird durch die tatsächlichen Werte von $\tilde{\omega}$ und η_o festgelegt (siehe hierzu Teil D). Den Bereich $|z - z_w^{(o)}| \leqq \delta(\eta_o)$, in dem die HME nicht mehr konvergiert, bezeichnen wir als Widerstandsschicht, weil in ihr der Widerstand eine dominierende Rolle spielt. Die dort erforderliche Entwicklung betrachten wir näher in II.3.

1.e Berechnung der hydromagnetischen Näherung.
Ideale Näherung der Phasengeschwindigkeit.

Wir erhalten für die hydromagnetische Näherung $B = B^o + \tilde{\omega} B^{(1)}$, $u = u^{(o)} + \tilde{\omega} u^{(1)}$ aus (I.3.1,2) die Gleichungen (II.1.5-6) und

(II.1.8) $$-\rho_o^{1/2} \Delta u^{(o)} - i \tilde{D}_o \Delta u^{(1)} + i \tilde{D}_o'' u^{(1)} = -F_o \Delta B^{(1)} + i F_o'' B^{(1)}$$

(II.1.9) $$\rho_o^{1/2} B^{(o)} + i \tilde{D}_o B^{(1)} = 4\pi i F_o u^{(1)}$$

Für beide Gleichungssysteme ist $z_w^{(o)}$ ein singulärer Punkt, falls $\mathrm{Re}\,\omega \neq 0$.

α) nullte Ordnung.

Die Forderung nach einer konsistenten Entwicklung von $u^{(o)}$, $B^{(o)}$ um $z_w^{(o)}$ führt zu einer Bedingung für $\omega^{(o)}$: nehmen wir an, es wäre $\tilde{D}_o(z_w^{(o)}) \neq 0$, dann $u^{(o)} \sim \frac{B^{(o)}}{z} + O(1)$; ein solcher Pol ist aber mit (II.1.6) unverträglich, sofern

$(\widetilde{D}_o'(0))^2 \neq 4 \quad (F_o'(0))^2$ (diesen singulären Fall schließen wir hier aus).
Es folgt: $\widetilde{D}_o\,(z_w^{(o)}) = 0$
oder

(II.1.10) $\omega^{(o)} = -k\,V_o(z_w^{(o)})$ d.h. die Strömung breitet sich mit einer Phasengeschwindigkeit aus, die gleich der lokalen Strömungsgeschwindigkeit bei $z = z_w^{(o)}$ ist.

Sei nun

$$\widetilde{D}_o = d_1(z - z_w^{(o)}) + d_2(z - z_w^{(o)})^2 + \dots$$

$$F_o = f_1(z - z_w^{(o)}) + f_3(z - z_w^{(o)})^3 + \dots$$

Der Einfachheit halber setzen wir hier $f_2 = 0$
(für $f_2 \neq 0$, siehe Anhang I).
Mit (II.1.5,6) erhalten wir um die Stelle $z_w^{(o)}$:

$$B^{(o)} = b_o^{(o)} + b_1^{(o)}(z - z_w^{(o)})\ln(z - z_w^{(o)}) + b_2^{(o)}(z - z_w^{(o)}) + \dots$$

$$u^{(o)} = \frac{d_1}{4\pi f_1} b_o^{(o)} + \frac{d_1}{4\pi f_1} b_1^{(o)}(z - z_w^{(o)})\ln(z - z_w^{(o)}) + \left(\frac{d_1}{4\pi f_1} b_2^{(o)} + \frac{d_2}{4\pi f_1} b_1^{(o)}\right)(z - z_w^{(o)}) + \dots$$

Der logarithmische Term tritt nur auf, wenn $d_2 \neq 0$.
Es gilt dann für $b_1^{(o)}$:

(II.1.11) $$b_1^{(o)} = \frac{-2 d_1 d_2}{4\pi f_1^2 - d_1^2}\, b_o^{(o)}$$

Wie in II.1.c erwähnt, müssen die Koeffizienten $b_i^{(o)}$ für $(z - z_w^{(o)}) \gtrless 0$ getrennt berechnet werden.

Wir schreiben

$$\mathcal{B}^{(0)} = b_0^{(0)} + b_1^{(0)\pm}(z - z_w^{(0)}) \ln(z - w_w^{(0)}) + b_2^{(0)\pm}(z - z_w^{(0)}) + \dots ,$$

(desgl. $u^{(0)}$). Für vorgegebene $b_0^{(0)\pm} \neq 0$

folgt $b_1^{(0)\pm}$ aus (II.1.13), ferner $b_2^{(0)\pm}$ durch analytische oder numerische Lösung von (II.1.12) vom rechten bzw. linken Rand her. Es gilt weiterhin:

$$\frac{b_1^{(0)+}}{b_0^{(0)+}} = \frac{b_1^{(0)-}}{b_0^{(0)-}} \quad , \text{ aber i.a.}$$

$$\frac{b_2^{(0)+}}{b_0^{(0)+}} \neq \frac{b_2^{(0)-}}{b_0^{(0)-}}$$

Wir werden später zeigen, daß für

$$\Delta_h \equiv \frac{b_2^{(0)+}}{b_0^{(0)+}} - \frac{b_2^{(0)-}}{b_0^{(0)-}} \gtrless 0 \text{ Instabilität vorliegt,}$$

wobei das Gleichheitszeichen zum marginalen Mode gehört.

ß. erste Ordnung

Wir eliminieren $u^{(1)}$ aus (II.1.8,9) und erhalten

(II.1.12) $$u^{(1)} = \frac{\rho_0^{1/2}}{4\pi F_0}\mathcal{B}^{(0)} + \frac{\widetilde{D}_0}{4\pi F_0}\mathcal{B}^{(1)}$$

(II.1.13) $$iF_0\Delta\mathcal{B}^{(1)} - i\widetilde{D}_0\Delta\left(\frac{\widetilde{D}_0}{4\pi F_0}\mathcal{B}^{(1)}\right) - iF_0''\mathcal{B}^{(1)} + i\widehat{D}_0''\frac{\widetilde{D}_0}{4\pi F_0}\mathcal{B}^{(1)} =$$
$$-\rho_0^{1/2\,\prime\prime}u^{(0)} + \rho_0^{1/2}\Delta u^{(0)} + \widehat{D}_0\Delta\left(\frac{\rho_0^{1/2}}{4\pi F_0}\mathcal{B}^{(0)}\right) - \widehat{D}_0''\frac{\rho_0^{1/2}}{4\pi F_0}\mathcal{B}^{(0)}$$

Vergleichen wir die bei $z_w^{(0)}$ führenden Terme $iF_0\Delta\mathcal{B}^{(1)}$ und $\widetilde{D}_0\Delta\left(\frac{\rho_0^{1/2}}{4\pi F_0}\mathcal{B}^{(0)}\right)$, so erhalten wir

mit $\widetilde{D}_0(z_w^{(0)}) = 0$:

$$\mathcal{B}^{(1)} \lesssim O\left(\frac{1}{z - z_w^{(0)}}\right) \quad , \quad u^{(1)} \lesssim O\left(\frac{1}{z - z_w^{(0)}}\right)$$

Dieser singuläre Term verschwindet natürlich, wenn $\tilde{D}_o$ bei $z_w^{(o)}$ eine Nullstelle genügend hoher Ordnung hat.

II.2. Marginale Moden

Für $\mathrm{Re}\,\omega = 0$ erhalten wir aus (I.3.1,2) die Gleichungen für den marginalen Mode mit $k_o(\eta_o)$ und der Phasengeschwindigkeit $\omega_o(\eta_o)$.
Wie in I.6 interessieren wir uns für $\eta_o \to 0$ nur für die ideale Näherung dieser marginalen Parameter ($k_o^{(o)}, \omega_o^{(o)}$).
Hierzu müssen wir die Differentialgleichungen (II.1.5-6) lösen, wobei wir jetzt reguläre Lösungen $u^{(o)}$, $B^{(o)}$, die den Randbedingungen genügen, suchen ($\to$ Eigenwert $k_o^{(o)}$).
Evtl. auf der reellen Achse liegende Singularitäten können dabei durch eine geeignete Verschiebung des Integratio nsweges umgangen werden. Die Singularitäten $z_v^{(i)}$ dürfen dabei natürlich nicht überquert werden.

3. Entwicklung in der singulären Schicht (Widerstandsschicht - Entwicklung, WSE)

Da die hydromagnetische Entwicklung (II.1.1,2) für $|z - z_w^{(o)}| \leqq \delta(\eta_o)$ divergiert, muß in diesem Bereich eine andere Entwicklung gefunden werden. Eine solche Widerstandsschicht-Entwicklung (WSE) wird für $\eta_o \to 0$ natürlich nur in einer gewissen kleinen Umgebung von $z_w^{(o)}$ konvergieren, da die Störungsrechnung nach η_o nach wie vor singulärer Art ist. Physikalisch gesehen, hat man in der δ-Schicht $|z - z_w^{(o)}| \leqq \delta(\eta_o)$ sehr schnelle Änderungen der Störung, für die die HME divergiert. Durch eine Dehnung der unabhängigen Variabeln $(z - z_w^{(o)})$ werden diese Änderungen geglättet, so daß eine konvergente Entwicklung in dieser δ-Schicht möglich wird. Singularitäten treten dann für große Werte der gedehnten Variablen, d.h. am Rande der δ-Schicht auf.

3.a. Dehnung der unabhängigen Variabeln. Formale Reihe.

Wir betrachten die Dehnung:

(II.3.1) $\zeta \equiv \frac{z - z_w^{(0)}}{\varepsilon}$, $\varepsilon \to 0$ $(\eta_0 \to 0)$

Durch eine geeignete Skalierung $\varepsilon(\eta_0)$ können wir erreichen, daß der Widerstandsterm in (I.3.1,2) dominiert. Eine Entwicklung von u,B in ζ, ε entspricht dann im wesentlichen einer Umordnung der Reihen (II.1.1,2), so daß sie bei $z = z_w^{(0)}$ konvergieren.

Um $\varepsilon(\eta_0)$ zu bestimmen, transformieren wir (I.3.1,2) auf ζ um, wobei:

$$\tilde{\omega}\, \rho_0^{1/2} \equiv \omega \rho_0^{1/2} + i\,(\mathfrak{D}_0 - \tilde{\mathfrak{D}}_0)$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_0(z) = \varepsilon d_1 \zeta + \varepsilon^2 d_2 \zeta^2 + \varepsilon^3 d_3 \zeta^3 + O(\varepsilon^4)$$

$$F_0(z) = \varepsilon f_1 \zeta + \varepsilon^3 f_3 \zeta^3 + O(\varepsilon^4)$$

$$\rho_0^{1/2} = 1 + O(\varepsilon)$$

$$\frac{d}{d\zeta} = \varepsilon \frac{d}{dz}$$

Damit ergibt sich (ohne Terme höherer Ordnung):

(II.3.2) $\tilde{\omega} u'' + i\varepsilon(d_1 + \varepsilon d_2 \zeta + \ldots)\zeta u'' - i\varepsilon^2(2d_2 + \ldots)u = i\varepsilon(f_1 + \ldots)\zeta \mathcal{B}'' - i\varepsilon^3(6 f_3 + \ldots)\zeta \mathcal{B}$

(II.3.3) $\eta_0 \mathcal{B}'' = \tilde{\omega}\varepsilon^2 \mathcal{B} + i\varepsilon^3(d_1 + \varepsilon d_2 \zeta + \ldots)\zeta \mathcal{B} - \tfrac{1}{4} i \varepsilon^3 (f_1 + \ldots)\zeta u$

$\left(' \equiv \frac{d}{d\zeta}\right)$

Wie man sieht, wird die Wahl der Skalierung $\varepsilon(\eta_0)$ durch die Ordnung der führenden Terme von $\tilde{\mathfrak{D}}_0$, F_0 in der Nähe von $z_w^{(0)}$ bestimmt. Wir setzen zunächst

(II.3.4) $\varepsilon \sim \eta_0^{p/q}$; p, q ganz, positiv.

Eine Bestimmung von p, q wird in Teil D für die wichtigsten Fälle durchgeführt. Eliminiert man nun η_0 aus (II.3.2,3), dann erhält man eine Entwicklung von $u, \mathcal{B}$ in Potenzen von $\tilde{\omega}, \varepsilon$. Die kleinen Parameter $\tilde{\omega}, \varepsilon$ sind natürlich im Sinne des Randwertproblems voneinander abhängig.

Wir schreiben:

(II.3.5) $$\mathcal{B} = \sum_{\tau,s=0}^{\infty} \tilde{\omega}^{\tau}\, \varepsilon^{s}\, \bar{\mathcal{B}}^{(\tau)(s)}(\zeta)$$

(II.3.6) $$u = \sum_{\tau,s=0}^{\infty} \tilde{\omega}^{\tau}\, \varepsilon^{s}\, \bar{u}^{(\tau)(s)}(\zeta)$$

3.b. Singuläre Stellen in der ζ-Ebene

Für das Verhalten der Reibungs-Singularitäten $\zeta_\nu^{(i)} \equiv \frac{z_\nu^{(i)} - z_w^{(0)}}{\varepsilon}$ gilt, wie in Teil D näher diskutiert wird, entweder $|\zeta_\nu^{(i)}| \longrightarrow 0$ oder $|\zeta_\nu^{(i)}| \longrightarrow \infty$ für $\varepsilon \to 0$.
Es ist dann immer möglich, in der ζ-Ebene einen Weg Γ zu finden, derart, daß der Abstand der $\zeta_\nu^{(i)}$ von Γ für $\varepsilon \to 0$ nach unten beschränkt bleibt.
Da die Funktionen $d_1\zeta$ bzw. $d_2\cdot\zeta^2$ und $f_1\zeta$ für $|\zeta| \to \infty$ divergieren, werden die $\bar{\mathcal{B}}^{(\tau)(s)}$, $\bar{u}^{(\tau)(s)}$ für $|\zeta| \to \infty$ i.a. singulär. Wir können deshalb zunächst nur erwarten, daß die Reihen (II.3.5,6) auf einem endlichen Kurvenstück Γ_R^{τ} mit $0 < \tau \leqq |\zeta| \leqq R$ gleichmäßig konvergieren (für $\varepsilon \to 0$, $\tilde{\omega} \longrightarrow 0$). Der endliche Abstand von Γ_R^{τ} vom Nullpunkt ist wegen derjenigen $\zeta_\nu^{(i)}$ notwendig, für die $|\zeta_\nu^{(i)}| \longrightarrow 0$ $(\varepsilon \to 0)$.
Es wird sich später auch zeigen, daß solche Singularitäten am Nullpunkt erst ab der 2. Ordnung in den Entwicklungen (II.3.5,6) auftreten.

3.c. Erweiterer Konvergenzbereich

Für $\varepsilon \longrightarrow 0$ konvergieren die Reihen (II.3.5,6) nicht nur auf Γ_R^{τ} mit festem $R < \infty$ gleichmäßig, sondern auch noch für gewisse $R(\varepsilon)$ mit $R(\varepsilon) \longrightarrow \infty$ $(\varepsilon \to 0)$.
Die Abhängigkeit $R(\varepsilon)$ wird dabei durch die Skalierung $\varepsilon(\eta_0)$ festgelegt. In Teil D wird dies für die wichtigsten Fälle diskutiert.

4. Gemeinsamer Konvergenzbereich der hydromagnetischen und der Widerstandsschicht-Entwicklung. Konstruktion der vollständigen Lösung.

Um mit den Entwicklungen (II.1.1,2) und (II.3.5,6) auf einem Weg, der die Randpunkte enthält, eine explizite Lösung in Form einer Entwicklung in gebrochenen Potenzen von η_0 zu erhalten, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

Vor.1: in der endlichen ζ-Ebene dürfen die $\overline{\mathcal{B}}^{(m)(s)}$, $\overline{u}^{(m)(s)}$ keine Singularitäten besitzen, außer solchen, die von der Vernachlässigung der Viskosität herrühen (bei $\zeta = 0$).

Vor.2: die erweiterten Konvergenzbereiche der HME und der WSE müssen sich überlappen. In dem Überlappungsbereich müssen die einzelnen Ordnungen $\overline{\mathcal{B}}^{(m)(s)}(\zeta)$, $\overline{u}^{(m)(s)}(\zeta)$ mit entsprechenden Termen $\mathcal{B}^{(m)(m)}(z)$, $u^{(m)(m)}(z)$ übereinstimmen, wobei nicht unbedingt die gleiche Reihenfolge vorliegen muß.

Es sei bemerkt, daß die "trivialen" Konvergenzbereiche $|z - z_w^{(0)}| \geq \delta$ bzw. $r \leq |\zeta| \leq R$ mit festen δ, R für $\varepsilon \to 0$ disjunkt sind, also für eine vollständige Lösung nicht ausreichen.

5. Dispersionsrelation

Mit der vollständigen Lösung kann das Randwertproblem in jeder Ordnung (in gebrochenen Potenzen von η_0) sukzessive gelöst werden. Als Eigenwert erhalten wir die Dispersionsbeziehung

$$\tilde{\omega}(k, \eta_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(k)\, \eta_0^{\alpha_i}, \qquad \alpha_i = \frac{\mu_i}{\nu_i}\ ;\ \mu_i, \nu_i \text{ ganz, positiv.} \tag{II.5.1}$$

Wir beschränken uns auf die Berechnung der niedrigsten Ordnung $\lambda_1(k)\, \eta_0^{\alpha_1}$. Hierzu sei bemerkt, daß die Erfüllung

von Vor. 2 in II.4 bereits α_1, d.h. das asymptotische Verhalten der Anwachsrate festlegt.

$\lambda_1(k)$ ($\longrightarrow$ Stabilitätsgrenze) wird erst durch explizite Berechnung der entsprechenden $B^{(m)(m)}$, $u^{(n)(m)}$ bzw. $\bar{B}^{(r)(s)}$, $\bar{u}^{(r)(s)}$ gewonnen.

III. Der Übergang von Tearing-Moden zu modifizierten Kelvin-Helmholtz-Moden.

Die in II. durchgeführte Entwicklung wird ungültig für $d_1^2/4 - f_1^2 = 0$ (siehe II. 1.e), da in diesem Fall $\beta_1^{(0)} = \infty$.
Der Übergang zu $d_1^2/4 - f_1^2 > 0$ entspricht einem Wechsel der Singularität $z_w^{(1)}$ von der oberen (komplexen) Halbebene über $i\cdot\infty$ in die untere Halbebene (siehe Abb.3). Dadurch kann die Entwicklung in η_0 auf einer Kurve in der oberen Halbebene erfolgen, die von den kritischen Singularitäten $z_w^{(0)}$, $z_w^{(1)}$, $z_w^{(2)}$ einen feste, endlichen Abstand hat. Auf Γ_{ab} können dann für $\eta_0 \longrightarrow 0$ die widerstandsabhängigen Terme vernachlässigt werden, so daß die hydromagnetische Näherung eine gleichmäßige Approximation der exakten Lösung darstellt. Es müssen somit für die niedrigste Ordnung nur die (idealen) Gleichungen (C.I.4.1,2) gelöst werden.

D. Tearing-Moden für spezielle Strömungsprofile

Die Lösung der Störungsgleichungen in der Widerstandsschicht hängt wesentlich davon ab, ob in ihr ein Strömungsgradient $d_1 \neq 0$ vorhanden ist. Wie die Gleichungen (C.II.3.2,3) zeigen, muß für $d_1 \neq 0$ eine andere Skalierung des Dehnungsparameters $\varepsilon(\eta_0)$ gewählt werden, als für $d_1 = 0$, da das asymptotische Verhalten beider Gleichungen für $\varepsilon \to 0$ verschieden ist.

I. Strömungsgradient in der Widerstandsschicht.

Wir nehmen im folgenden an, daß der Nullpunkt des Gleichgewichtsmagnetfeldes bei $z_0 = 0$ liege, also $\mathcal{B}_0(0) = 0$. Dann entwickeln wir $\widetilde{\mathcal{D}}_0(z) \equiv \overset{(0)}{\omega_0} + i\,\mathcal{D}_0(z)$ um $z_0 = 0$, wobei wir $d_2 = 0$ setzen ($d_2 \neq 0$ siehe Anhang I)

$$\widetilde{\mathcal{D}}_0(z) = d_1 z + O(z^3)$$

$$\mathcal{F}_0(z) = f_1 z + O(z^3)$$

Ferner sei (o.B.d.A) $d_1 < 0$, $f_1 < 0$.

1. Singuläre Stellen

In der Nähe von $z_0 = 0$ tritt gemäß C.I. 3.3 eine Reibungs-Singularität bei $z_v^{(0)} = \frac{i\widetilde{\omega}}{d_1}$ auf. Widerstandssingularitäten liegen nach (C.I.4.5) bei $z_w^{(1,2)} = \frac{i\widetilde{\omega}}{d_1 \pm \sqrt{d_1 f_1}}$, ferner bei $z_w^{(0)} = 0$

Wie in C.III. erläutert, muß für Tearing-Moden die Einschränkung $|d_1| < \sqrt{d_1 f_1}$ gemacht werden, von der wir im folgenden Gebrauch machen.

2. Singularitäten der hydromagnetischen Näherung

Aus (C.II.1. 12,13) folgt in niedrigster Ordnung in z:

$$i z\left(f_1 - \frac{d_1^2}{4\pi f_1}\right) \mathcal{B}^{(1)\prime\prime} = d_1 z \, \frac{b_0^{(0)\pm}}{2\pi f_1 z^3} + \ldots \qquad \begin{matrix} + & z>0 \\ - & z<0 \end{matrix}$$

$$\mathcal{B}^{(1)} = -i \frac{d_1}{4\pi f_1^2 - d_1^2} \frac{b_0^{(0)\pm}}{z} + O(1) \tag{I.2.1}$$

und

$$u^{(1)} = -i \frac{f_1}{4\pi f_1^2 - d_1^2} \frac{b_0^{(0)\pm}}{z} + O(1) \tag{I.2.2}$$

3. Skalierung der unabhängigen Variablen in der Widerstandsschicht

Die führenden Terme von (C.II.3.2,3) sind

$$\tilde{\omega} u'' + i\varepsilon d_1 \int u'' = i\varepsilon f_1 \int \mathcal{B}'' \tag{I.3.1}$$

$$\eta_0 \mathcal{B}'' = \tilde{\omega} \varepsilon^2 \mathcal{B} + i\varepsilon^3 d_1 \int \mathcal{B} - 4\pi i \varepsilon^3 f_1 \int u \tag{I.3.2}$$

In der HME trat eine Singularität der Art $\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}$ auf ((I.2.1)). Dem entspricht in der WSE für große $\int$ ein Term $\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} \frac{1}{\int}$. Um einen solchen Term zu erhalten, der zugleich für $|\int| < \infty$ regulär ist, setzen wir $\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}$ als Entwicklungsparameter an:
(Die Konsistenz dieses zunächst formalen Ansatzes wird anschließend gezeigt).

$$\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} u'' + i d_1 \int u'' = i f_1 \int \mathcal{B}''$$

$$\frac{\eta_0}{\varepsilon^3} \mathcal{B}'' = \frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} \mathcal{B} + i d_1 \int \mathcal{B} - 4\pi i f_1 \int u$$

$$\mathcal{B} = \bar{\mathcal{B}}^{(0)} + \frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} \bar{\mathcal{B}}^{(1)} + \left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right)^2 \bar{\mathcal{B}}^{(2)} + \ldots . \tag{I.3.3}$$

$$u = \bar{u}^{(0)} + \frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} \bar{u}^{(1)} + \left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right)^2 \bar{u}^{(2)} + \ldots . \tag{I.3.4}$$

Damit $\mathcal{B}^{(1)}$ für $\zeta \to 0$ regulär wird, muß $\frac{\eta_0}{\varepsilon_3}$ von nullter Ordnung in η_0 sein (die Reibungs-Singularität tritt erst in höherer Ordnung in Erscheinung).

Wir setzen

(I.3.5) $\eta_0 = \varepsilon^3 \tau_0$, $(\tau_0 \sim O(1)$, τ_0 spielt nur die Rolle eines Dimensionsfaktors) und erhalten

(I.3.6) $$\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} u'' + i d_1 \zeta u' = i f_1 \zeta \mathcal{B}''$$

(I.3.7) $$\tau_0 \mathcal{B}'' = \frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} \mathcal{B} + i d_1 \zeta \mathcal{B} - 4\pi i f_1 \zeta u$$

mit $\left|\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right| \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ $(\eta_0 \to 0)$

4. Lösung der Störungsgleichungen in der Widerstandsschicht

Um zu zeigen, daß die oben definierte Entwicklung tatsächlich Vor. 1,2 in C.II.4 erfüllt und eine Lösung des Randwertproblems erlaubt, berechnen wir - zunächst formal - die einzelnen Ordnungen. In I.4d und I.5 zeigen wir dann die Konvergenz der Entwicklungen.

4.a Nullte Ordnung

Aus (I.3.6,7) folgt:

$$\bar{u}^{(0)\,\prime\prime} = \frac{f_1}{d_1} \bar{\mathcal{B}}^{(0)\,\prime\prime}$$

Wegen $u^{(0)} = \frac{d_1}{4\pi f_1} \mathcal{B}^{(0)}$ für die hydromagnetische Entwicklung, muß gelten:

(I.4.1) $$\bar{u}^{(0)\,\prime\prime} \equiv \bar{\mathcal{B}}^{(0)\,\prime\prime} \equiv 0$$

Da ein linearer Term $\sim \zeta$, d.h. $\sim \frac{z}{\varepsilon}$ nicht vorkommt, setzen wir:

$$\bar{\mathcal{B}}^{(0)} \equiv \mathcal{B}_0^{(0)} \equiv \text{const.}$$

(Aus Stetigkeitsgründen muß sein $\mathcal{B}_0^{(0)+} = \mathcal{B}_0^{(0)-} \equiv \mathcal{B}_0^{(0)}$)

4.b Erste Ordnung

(I.4.2) $$i d_1 \zeta \bar{u}^{(1)''} - i f_1 \zeta \bar{\mathcal{B}}^{(1)''} = -\bar{u}^{(0)''} = 0$$

(I.4.3) $$\tau_0 \bar{\mathcal{B}}^{(1)''} - i d_1 \zeta \bar{\mathcal{B}}^{(1)} + 4\pi i f_1 \zeta \bar{u}^{-1} = \bar{\mathcal{B}}^{(0)} = \mathcal{B}_0^{(0)}$$

und damit

(I.4.4) $$\bar{u}^{(1)} = \frac{f_1}{d_1} \bar{\mathcal{B}}^{(1)}$$

Auf eine lineare Funktion können wir wieder verzichten, da sie bereits zur nullten Ordnung gehört.

Mit (I.4.3):

(I.4.5) $$\bar{\mathcal{B}}^{(1)''} - i \frac{d_1^2 - 4\pi f_1^2}{d_1} \zeta \tau_0^{-1} \bar{\mathcal{B}}^{(1)} = \mathcal{B}_0^{(0)} \tau_0^{-1}$$

Lösungen dieser Gleichung erhalten wir durch Variation der Konstanten aus denen der zugehörigen homogenen Gleichung die durch die Transformation

$$\zeta = \lambda \cdot \eta \quad , \quad \lambda = \left(\frac{i d_1 \tau_0}{4\pi f_1^2 - d_1^2} \right)^{1/3}$$

auf die Differentialgleichung der Airy-Funktionen zurückgeführt wird:

(I.4.6) $$\frac{d^2}{d\eta^2} Ai(\eta) - \eta Ai(\eta) = 0$$

Es gibt (siehe Anhang II) zwei Fundamentallösungen $Ai_1(\eta)$ und $Ai_2(\eta)$, derart, daß die damit gebildete Lösung von (I.4.5):

(I.4.7) $$\bar{\mathcal{B}}^{(1)} = \frac{\mathcal{B}_0^{(0)} \tau_0^{-1}}{W} \left[Ai_2\left(\lambda^{-1}\zeta\right) \int_{\infty(W_1)} Ai_1\left(\lambda^{-1}\zeta'\right) d\zeta' - Ai_1\left(\lambda^{-1}\zeta\right) \int_{\infty(W_2)} Ai_2\left(\lambda^{-1}\zeta'\right) d\zeta' \right.$$

(W_i nach ∞ in S_i , Abb. 12)

folgende Eigenschaften hat:

1. $\bar{\mathcal{B}}^{(1)}$ regulär

(I.4.8) 2. $\bar{\mathcal{B}}^{(1)} = \frac{i\, b_0^{(0)} d_1}{d_1^2 - 4\pi f_1^2} \frac{1}{\zeta} + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)$ für $|\zeta| \to \infty$

außer in dem Sektor S_3,
wo $\bar{\mathcal{B}}^{(1)}$ exponentiell zunimmt für $|\zeta| \to \infty$.

W ist die Wronskideterminate von $Ai_1(\eta)$, $Ai_2(\eta)$ $(W \equiv \text{const.})$

Ein Vergleich von (I.4.10), (I.4.4) mit (I.2.1,2) zeigt eine Übereinstimmung im asymptotischen Verhalten dieser Ordnung für $|\zeta| \to \infty$ bzw. $|z| \to 0$.
Oben genante Eigenschaft 2) führt zu der Einschränkung, daß ein Weg Γ nicht in S_3 gegen ∞ gehen darf, da sonst eine Überlappung von $\bar{\mathcal{B}}^{(1)}(\zeta)$ und $\bar{\mathcal{B}}^{(2)}$ nicht möglich ist.
Die reelle ζ-Achse ist hingegen ein geeigneter Weg.

4.c. Zweite Ordnung

(I.4.9) $$i d_1 \zeta \bar{u}^{(2)''} - i f_1 \int \bar{\mathcal{B}}^{(2)''} = -\bar{u}^{(1)''}$$

(I.4.10) $$z_0 \bar{\mathcal{B}}^{(2)''} - i d_1 \zeta \bar{\mathcal{B}}^{(2)} + 4\pi i f_1 \int \bar{u}^{(2)} = \bar{\mathcal{B}}^{(1)}$$

Wir zeigen die Existenz von Lösungen, die für $\zeta \to \pm\infty$ das gleiche asymptotische Verhalten haben, wie der lineare Term in den $\mathcal{B}^{(0)}$ bzw. $u^{(0)}$ der HME (ein Term $\sim z \ln z$ tritt hier nicht auf, da wir $d_2 = 0$ setzen; für $d_2 \neq 0$ siehe Anhang I).
Es folgt:

$$z_0 \left(\frac{\bar{\mathcal{B}}^{(2)''}}{\zeta}\right)'' - i d_1 \bar{\mathcal{B}}^{(2)''} + 4\pi i f_1 \left[\frac{f_1}{d_1} \bar{\mathcal{B}}^{(2)''} + i \frac{\bar{u}^{(1)}}{d_1 \zeta}\right] = \left(\frac{\bar{\mathcal{B}}^{(1)}}{\zeta}\right)''$$

(I.4.11) $$\bar{u}^{(2)''} = \frac{f_1}{d_1} \bar{\mathcal{B}}^{(2)''} + i \frac{\bar{u}^{(1)''}}{d_1 \zeta}$$

und mit (I.4.4):

(I.4.12) $$\left(\tau_0 \frac{\bar{B}^{(2)}}{\zeta}''\right)'' - i\,\frac{d_n^2 - 4\pi f_n^2}{d_n}\,\bar{B}^{(2)''} = 4\pi f_n^2 \frac{\bar{B}^{(4)''}}{\zeta} + \left(\frac{\bar{B}^{(4)}}{\zeta}\right)'' \equiv h$$

Für $\zeta \to 0$ gilt für die Inhomogenität h:

$$h \sim \frac{a}{\zeta} + \frac{b}{\zeta^3} + O(1)$$

mit $a, b \neq 0$ wegen $\bar{B}^{(4)}(0)$, $\bar{B}^{(4)}(0)'' \neq 0$

(siehe die Funktion W in Anhang II)

Es folgt:

$$\bar{B}^{(2)''} \sim \zeta^2 \ln\zeta + O(1)$$

ferner mit (I.4.11):

$$\bar{u}^{(2)''} \sim \frac{1}{\zeta} \qquad (\bar{u}^{(4)''}(0) \neq 0)$$

Diese Reibungs-Singularität wird - wie unter C.I. 3.b diskutiert - durch einen Weg Γ^+ in der oberen ζ-Ebene umgangen, da nach unserer Festsetzung das entsprechende $z_v^{(0)}$ in der unteren Halbebene liegt.

Für $\zeta \to \pm\infty$ gilt:

$$h \sim \frac{1}{\zeta^4} + O\left(\frac{1}{\zeta^7}\right)$$

Mit (I.4.12) folgt:

(I.4.13) $$\bar{B}^{(2)''} \sim \frac{1}{\zeta^4} + O\left(\frac{1}{\zeta^7}\right)$$

(I.4.14) $$\bar{B}^{(2)} = a^{\pm}\cdot\zeta + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)$$

Damit ist $\bar{B}^{(2)}(\zeta)$ für große $|\zeta|$ linear, analog $B^{(0)}(z)$ für kleine $|z|$, so daß beide Terme zur Überlappung führen können.

Eine vollständige Lösung von (I.4.12) kann mit der Substitution $\phi \equiv \frac{\bar{B}^{(2)''}}{\zeta}$ über die Airy-Funktionen erfolgen. Dabei ist als asymptotische Anfangsbedingung (bei $\zeta = -\infty$) $\bar{B}^{(2)} = \bar{a}^- \cdot \zeta$ zu setzen. Wir benötigen nicht die explizite Form von $\bar{B}^{(2)}(\zeta)$, vielmehr genügt es für die niedrigste Ordnung, den Sprung der asymptotischen Ableitung $\frac{d\bar{B}^{(2)}}{d\zeta}$ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ zu berechnen. Dieser Sprung wurde von der HME wegen der Singularität bei $z_w^{(2)}$ nicht geliefert, ist aber notwendig für die Konstruktion einer von a nach b durchgehenden Lösung.

Sei $$\Delta \bar{B}^{(2)'} \equiv \lim_{R\to\infty} \left(\bar{B}^{(2)'}(+R) - \bar{B}^{(2)'}(-R) \right) = a^+ - a^- = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^+} \bar{B}^{(2)''} \, d\zeta$$ wobei Γ_R^+ von $-R$ nach $+R$ geht und den Nullpunkt oben herum umfährt.

Wir integrieren (I.4.12) längs Γ_R^+ :

$$z_0 \int_{\Gamma_R^+} \left(\frac{\bar{B}^{(2)'}}{\zeta} \right)'' d\zeta - i \frac{d_1^2 - 4\pi f_1^2}{d_1} \int_{\Gamma_R^+} \bar{B}^{(2)''} d\zeta - \frac{4\pi f_1^2}{d_1} \int_{\Gamma_R^+} \frac{\bar{B}^{(1)''}}{\zeta} d\zeta - \int_{\Gamma_R^+} \left(\frac{\bar{B}^{(1)}}{\zeta} \right)'' d\zeta = 0$$

Das 1. und 4. Integral verschwinden wegen (I.4.8) und (I.4.13).

Beachten wir, daß $\frac{\bar{B}^{(1)''}}{\zeta}$ bei $\zeta = 0$ einen Pol 1.Ordnung hat, dann können wir schreiben:

$$\int_{\Gamma_R^+} \frac{\bar{B}^{(1)''}}{\zeta} = -\int_{\Gamma_R^-} \frac{\bar{B}^{(1)''}}{\zeta} - 2\pi i \, \mathrm{Res} \left. \frac{\bar{B}^{(1)''}}{\zeta} \right|_{\zeta=0}$$

wobei Γ_R^- ein Halbkreis in der unteren Halbebene mit Radius R ist.

Wegen (I.4.13) gilt aber $\bar{\mathcal{B}}^{(1)''} \sim \frac{1}{\zeta^3}$ auf Γ_R^- so daß das Integral auf der rechten Seite verschwindet, und $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^+} \frac{\bar{\mathcal{B}}^{(1)''}}{\zeta} = -2\pi i\, \bar{\mathcal{B}}^{(1)}(0)''$ gilt.

Es folgt:

$$-i\,\frac{d_1^2 - 4\pi f_1^2}{d_1}\,\Delta\bar{\mathcal{B}}^{(2)\prime} = -\frac{4\pi f_1^2}{d_1^2}\,2\pi i\,\mathcal{B}^{(1)}(0)''$$

Nach (I.4.5) ist $\bar{\mathcal{B}}^{(1)}(0) = b_0^{(0)}\,\tau_0^{-1}$ und

$$\Delta\bar{\mathcal{B}}^{(2)\prime} = \frac{8\pi^2 f_1^2}{d_1^2 - 4\pi f_1^2}\,\frac{b_0^{(0)}}{d_1}\,\tau_0^{-1} \tag{I.4.15}$$

Mit (I.3.3) ergibt sich (in niedrigster Ordnung) für den Sprung der asymptotischen Ableitung von $\mathcal{B}(\zeta)$:

$$\Delta\mathcal{B}'(\zeta) = \left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^2 \frac{8\pi^2 f_1^2}{d_1^2 - 4\pi f_1^2}\,\frac{b_0^{(0)}}{d_1}\,\tau_0^{-1} \tag{I.4.16}$$

Es sei bemerkt, daß für $d_1 > 0$ ($d_1^2 < 4\pi f_1^2$) $z_\nu^{(0)}$ in der oberen Halbebene liegt. In diesem Fall wählt man statt (I.4.7) eine komplementäre Lösung, die überall, außer in S_3^* : $\frac{5\pi}{6} \leqq \arg\zeta \leqq \frac{\pi}{6}$ das gewünschte asymptotische Verhalten $\sim \frac{1}{\zeta}$ hat. Entsprechend ersetzt man Γ_R^+ durch einen Weg unterhalb des Nullpunktes, wodurch (I.4.16) auf beliebige $d_1 \neq 0$ verallgemeinert werden kann:

$$\Delta\mathcal{B}'(\zeta) = \left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^2 \frac{8\pi^2 f_1^2}{4\pi f_1^2 - d_1^2}\,\frac{b_0^{(0)}}{|d_1|}\,\tau_0^{-1} \tag{I.4.17}$$

Die Forderung, daß $\bar{\mathcal{B}}^{(2)}$ für $\zeta \longrightarrow \pm\infty$ das gleiche asymptotische Verhalten habe, wie der lineare Term $b_\nu^{(0)\pm}\cdot z$ von $\mathcal{B}^{(0)}(z)$ für $z \longrightarrow \pm 0$, führt zur Identifizierung von $\Delta\mathcal{B}'(\zeta)$ und $\varepsilon\cdot\Delta\mathcal{B}'(z) \equiv \varepsilon\cdot\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{d\mathcal{B}}{dz}\Big|_{z=+\delta} - \frac{d\mathcal{B}}{dz}\Big|_{z=-\delta}\right)$:

$$\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^2 \frac{8\pi^2 f_1^2}{4\pi f_1^2 - d_1^2}\,\frac{b_0^{(0)}}{|d_1|}\,b_0^{(0)}\,\tau_0^{-1} = \varepsilon\left(b_2^{(0)+} - b_2^{(0)-}\right)$$

Mit $\Delta'(k) \equiv \frac{b_2^{(0)+} - b_2^{(0)-}}{b_0^{(0)}}$ als Sprung der logarithmischen Ableitung $\frac{d}{dz} \ln \bar{B}^{(0)}$ erhalten wir:

(I.4.18) $$\left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon \frac{4\pi^2 f_1^2 - d_1^2}{8\pi^2 f_1^2} |d_1| \tau_0 \Delta'(k)$$

Damit ist der Entwicklungsparameter $\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}$, der in I.3 noch frei war, festgelegt:

(I.4.19) $$\left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon \gamma^2 \qquad \gamma = O(1)$$

d.h.
$$\left|\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right| \longrightarrow 0 \qquad (\varepsilon \to 0,\ \eta_0 \to 0)$$

4.d Konvergenz der formalen Widerstandsschicht-Entwicklung

Wegen $\left|\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right| \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0)$ ist die Konsistenz der in I.3 zunächst formalen Überlegungen gesichert und die Reihen (I.3.3,4) konvergieren für $|\rho| \leq R$ und $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig.

Den erforderlichen erweiterten Konvergenzbereich $R(\varepsilon) \longrightarrow \infty$ erhalten wir durch eine Abschätzung der einzelnen Ordnungen, wobei wir hier auch $d_2, f_2 \neq 0$ zulassen.

Mit $\eta_0 = \tau_0 \varepsilon^3$, $\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} = \gamma \varepsilon^{1/2}$ erhalten wir aus (C II.3.2-4):

(I.4.20) $$\bar{u}^{(n-1)''} + i\rho\left(d_1 \bar{u}^{(n)'} + \rho\gamma^{-2} d_2 \bar{u}^{(n-2)''} + \ldots\right) - i\gamma^{-2}\left(2 d_2 \bar{u}^{(n-2)'} + \ldots\right) =$$
$$i\rho\left(f_1 \bar{B}^{(n)''} + \rho\gamma^{-2} f_2 \bar{B}^{(n-2)''} + \ldots\right) - i\gamma^{-2}\left(2 f_2 \bar{B}^{(n-2)'} + \ldots\right)$$

(I.4.21) $$\tau_0 \bar{B}^{(n)''} = \bar{B}^{(n-1)''} + i\rho\left(d_1 \bar{B}^{(n)'} + \rho\gamma^{-2} d_2 \bar{B}^{(n-2)'} + \ldots\right) - 4\pi i\rho\left(f_1 \bar{u}^{(n)'} + \rho\gamma^{-2} f_2 \bar{u}^{(n-2)'} + \ldots\right)$$

Aus (I.4.20,21) folgt eine Abschätzung der Größenordnungen:

$$d_1 \bar{u}^{(n)''} - f_1 \bar{B}^{(n)''} \lesssim O\left(\rho \bar{u}^{(n-2)''},\ \frac{\bar{u}^{(n-2)'}}{\rho},\ \rho \cdot \bar{B}^{(n-2)''},\ \frac{\bar{B}^{(n-2)'}}{\rho}\right)$$

(I.4.22) $$d_1 \bar{\mathcal{B}}^{(n)} - 4\pi f_1 \bar{u}^{(n)} \lesssim o\left(\rho \bar{\mathcal{B}}^{(n-2)}, \frac{\bar{\mathcal{B}}^{(n-1)''}}{\rho}, \rho \bar{u}^{(n-2)}\right)$$

Erstere Abschätzung liefert nach Integration:

(I.4.23) $$d_1 \bar{u}^{(n)} - f_1 \bar{\mathcal{B}}^{(n)} \lesssim o\left(\rho^2 \bar{u}^{(n-2)}, \rho^2 \bar{\mathcal{B}}^{(n-2)}, \rho\right)$$

Dabei verwenden wir, daß für eine Funktion h, die bei $\rho = \infty$ einen Pol endlicher Ordnung hat, gilt:

(I.4.24) $$h \lesssim o(\rho^3 h'') \quad , \quad h'' \lesssim o\left(\frac{h}{\rho^2}\right) \qquad (|\rho| \to \infty)$$

für (I.4.22,23) erhalten wir:

$$\bar{\mathcal{B}}^{(n)} \lesssim o\left(\rho^2 \bar{\mathcal{B}}^{(n-2)}, \rho^2 \bar{u}^{(n-2)}, \rho, \bar{\mathcal{B}}^{(n-1)}\right)$$

$$\bar{u}^{(n)} \lesssim o\left(\rho^2 \bar{\mathcal{B}}^{(n-2)}, \rho^2 \bar{u}^{(n-2)}, \rho, \bar{\mathcal{B}}^{(n-1)}\right)$$

(für $|\rho| \to \infty$ gilt $\frac{\bar{\mathcal{B}}^{(n-1)''}}{\rho} \lesssim o(\bar{\mathcal{B}}^{(n-1)})$)

Mit den Anfangsgliedern

$$\bar{u}^{(0)}, \bar{\mathcal{B}}^{(0)} \lesssim o(1)$$
$$\bar{u}^{(1)}, \bar{\mathcal{B}}^{(1)} \lesssim o(\rho^{-1})$$
$$\bar{u}^{(2)}, \bar{\mathcal{B}}^{(2)} \lesssim o(\rho \ln \rho)$$

sehen wir, daß folgende Abschätzung gilt:

$$\bar{\mathcal{B}}^{(n)} \lesssim (C_1 \rho)^n \quad , \quad \bar{u}^{(n)} \lesssim (C_2 \rho)^n \qquad (|\rho| \to \infty)$$

Mit (I.4,19) erhalten wir für den Term n.-ter Ordnung:

(I.4.25) $$\left|\left(\frac{\widetilde{\omega}}{\varepsilon}\right)^{n}\bar{B}^{(n)}\right| \lesssim \left|C_1\,\gamma\,\varepsilon^{1/2}\zeta\right|^{n}$$

(I.4.26) $$\left|\left(\frac{\widehat{\omega}}{\varepsilon}\right)^{n}\tilde{u}^{(n)}\right| \lesssim \left|C_2\,\gamma\,\varepsilon^{1/2}\zeta\right|^{n}$$

Die Koeffizienten C_1, C_2 sind von n unabhängig, da die d_i, f_i für reguläre Gleichgewichtsfunktionen gleichmäßig beschränkt sind.
Wir definieren nun:
$R(\varepsilon) \equiv R^{*}\,\varepsilon^{-1/4}$ mit $0<\tau<R^{*}<\infty$, R^{*} fest.
Für $\zeta \in T_R^{\tau+}$ und $\tau \leqq |\zeta| \leqq R(\varepsilon)$ konvergieren dann die unendlichen Reihen (I.3.3,4) gleichmäßig und jede Partialsumme approximiert gleichmäßig die exakte Lösung für $\left|\frac{\widehat{\omega}}{\varepsilon}\right| \longrightarrow 0$ $(\eta_0 \to 0)$.

5. Existenz eines gemeinsamen Konvergenzbereiches. Vollständige Lösung.

Wir zeigen nun, daß sich für genügend großes R^{*} die Konvergenzbereiche der WSE und der HME überlappen.

Nach (C.II.1,7) konvergiert die HME für $|z| \geqq \delta$ mit $\left|\frac{\widetilde{\omega}}{\varepsilon}\right| \longrightarrow 0$, $\frac{\eta_0}{\delta^3} \to 0$ $(\eta_0 \to 0)$
Sei $\delta = \varepsilon^{3/4}$, dann $\left|\frac{\widetilde{\omega}}{\delta}\right| \sim \frac{\varepsilon^{3/2}}{\varepsilon^{3/4}} = \varepsilon^{3/4} \longrightarrow 0$ und
$\frac{\eta_0}{\delta^3} \sim \frac{\varepsilon^{3}}{\varepsilon^{9/4}} = \varepsilon^{3/4} \longrightarrow 0$
In der ζ-Ebene bedeutet dies, wegen $\zeta \equiv \frac{z}{\varepsilon}$

(I.5.1) $$|\zeta| \geqq \frac{\delta}{\varepsilon} = \varepsilon^{-1/4}$$

Wählen wir nun irgendein R^{*} mit $1 < R^{*} < \infty$, dann ist der Bereich $\Delta R(\lambda)$ mit:

(I.5.2) $$\zeta = \lambda \cdot \varepsilon^{-1/4}, \qquad 1 \leqq |\lambda| \leq R^{*}$$

in beiden Konvergenzbereichen enthalten, also der gesuchte Überlappungsbereich.

Um eine Approximation der exakten Lösung bis zu beliebiger Ordnung (in $\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} \sim \varepsilon^{1/2}$) zu erhalten, müssen wir nur die Entwicklungsterme der HME mit den entsprechenden der WSE im Überlappungsbereich identifizieren. Bei gegebenem η_0 ergibt sich dann $\tilde{\omega}(k)$ als Bedingung für die Erfüllbarkeit der Randbedingungen. Insbesondere ist die Approximation der exakten Lösung gleichmäßig auf dem durch die Überlappung gewonnenen Weg Γ_{ab} , der die Randpunkte a, b mit einander verbindet.

Eine Berücksichtigung des Widerstands in der niedrigsten Ordnung erfordert es, in den Reihenentwicklungen Terme bis zur Ordnung $(\tilde{\omega}/\varepsilon)^2 \sim \varepsilon$ mitzunehmen. Wir stellen die entsprechenden Terme nebst ihren Werten im Überlappungsbereich gegenüber:

HME		WSE	
Term	in $\Delta R(1)$	Term	in $\Delta R(\lambda)$
$B^{(0)} = b_0^{(0)} + b_2^{(0)\pm} z$	$b_0^{(0)} + b_2^{(0)\pm} \lambda \varepsilon^{1/2}$	$\bar{B}^{(0)} = b_0^{(0)}$ $\left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right)^2 \bar{B}^{(0)} \approx \left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right)^2 a^{\pm} \int (\beta \to \infty)$	$b_0^{(0)}$ $\left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right)^2 a^{\pm} \lambda \varepsilon^{-1/2}$
$\hat{\omega} B^{(1)} = -\hat{\omega} \frac{i d_1}{4\pi f_1^2 - d_1^2} \frac{b_0^{(0)}}{z}$	$-\frac{\hat{\omega} i d_1}{4\pi f_1^2 - d_1^2} \frac{b_0^{(0)}}{\lambda \varepsilon^{1/2}}$	$\left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right) \bar{B}^{(1)} = -\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} \frac{i d_1}{4\pi f_1^2 - d_1^2} \int b_0^{(0)}$	$-\frac{\tilde{\omega} i d_1}{4\pi f_1^2 - d_1^2} \frac{b_0^{(0)}}{\lambda \varepsilon^{1/2}}$

Eine Edentifizierung des linearen Terms von $B^{(0)}$ mit $(\tilde{\omega}/\varepsilon)^2 \bar{B}^{(2)}$ in $\Delta R(\lambda)$ lieferte die in I.4 zunächst formal abgeleitete Anschlußbedingung (I.4.20).

6. Dispersionsrelation und Diskussion der Anwachsrate.

Mit $\eta_0 = \varepsilon^3 \tau_0$ folgt:

$$\tilde{\omega} = \left(\eta_0 \Delta'(k) |d_1| \frac{4\pi f_1^2 - d_1^2}{8\pi f_1^2} \right)^{1/2}$$

oder, für $k \parallel B_0 \parallel v_0$

(I.6.1) $$\tilde{\omega} = \left(\eta_0 \, \Delta'(k) \, |k v_0'(0)| \, \frac{4\pi F_0'^2(0) - B_0'^2(0)}{8\pi^2 F_0'(0)^2} \right)^{1/2}$$

Dabei ergibt sich $\Delta'(k)$ aus der Lösung der idealen Gleichung; es wird durch k; $v_0(z)$, $B_0(z)$, $\rho_0(z)$ festgelegt.
Wir führen eine Abschätzung der Anwachsrate durch:

Sei $\gamma_0 \equiv \left. \frac{\rho_0^{1/2} \, v_0' \sqrt{4\pi}}{B_0'} \right|_{z=0}$ (wir hatten oben $\rho_0(0) \equiv 1$

gesetzt, nehmen es jetzt aber wieder mit)

Mit $\frac{4\pi F_0'(0)^2 - B_0'(0)^2}{4\pi F_0'(0)^2} = 1 - \gamma_0^2$ und den Größenordnungsabschätzungen

$\Delta'(k) \approx \frac{1}{L}$, $B_0' \approx \frac{\langle B_0 \rangle}{L}$ (typische Länge)

erhalten wir $\tilde{\omega} \approx \left(\frac{\eta_0}{4\pi L^2} \right)^{1/2} \left(\frac{B_0'(0)}{\sqrt{4\pi} \rho_0^{1/2}} \, 2\gamma_0 (1 - \gamma_0^2) \right)^{1/2}$

oder

(I.6.2) $$\tilde{\omega} \approx \tau_R^{-1/2} \, \tau_H^{-1/2} \left(2\gamma_0 (1 - \gamma_0^2) \right)^{1/2}$$

(τ_R: Diffusionszeit, τ_H: ideale MHD-Zeit)

γ_0 ist dabei ein Maß für das Verhältnis Strömungsgradienten:Magnetfeldgradienten in der Widerstandsschicht.
Es sei bemerkt, daß für $\gamma_0 = 0$ die Anwachsrate (I.6.2) verschwindet. In diesem Fall (kein Strömungsgradient in der Widerstandsschicht) muß in der Entwicklung nach (gebrochenen) Potenzen von η_0 die nächste Ordnung berücksichtigt werden (siehe D.II).
Auch für $\gamma_0 = 1$ verschwindet $\tilde{\omega}$. Dieser singuläre Fall kennzeichnet den Übergang zu Instabilitäten anderer Art (siehe C.III über Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten).
Das Maximum von $2\gamma_0 (1 - \gamma_0)$ in $(0,1)$ ist 1, so daß

die maximale Anwachsrate

(I.6.3) $\tilde{\omega}_{max} \approx \tau_R^{-1/2} \tau_H^{-1/2}$ wird.

Für kleine Strömungsgradienten ist auch eine andere Deutung von (I.6.1) möglich: Die Anwachsrate einer Kelvin-Helmholtz-Instabilität ist von der Größenordnung $\tau_{K.-H.}^{-1} \approx |v_0'(0)|$, so daß wir (I.6.1) schreiben können als:

(I.6.4) $\tilde{\omega} \approx \tau_R^{-1/2} \tau_{K.-H.}^{-1/2}$

7. Lösung im idealen Bereich. Marginale Moden

Der Sprung $\Delta'(k) \equiv \dfrac{\mathcal{B}^{(0)\prime}(+0) - \mathcal{B}^{(0)\prime}(-0)}{\mathcal{B}^{(0)}(0)}$

ergibt sich aus den idealen Gleichungen (C.II.1.5,6):

(I.7.1) $$-\frac{\tilde{D}_e}{4\pi} \Delta\left(\frac{\tilde{D}_0}{F_0}\mathcal{B}^{(0)}\right) + \tilde{D}_0'' \frac{\tilde{D}_0}{4\pi F_0}\mathcal{B}^{(0)} = -F_0 \Delta \mathcal{B}^{(0)} + F_0'' \mathcal{B}^{(0)},$$

wobei zwei Anfangswertprobleme für die Intervalle $[a, -0)$ und $(+0, b]$ mit den Anfangsbedingungen $\mathcal{B}^{(0)}(a) = 0$ bzw. $\mathcal{B}^{(0)}(b) = 0$ gelöst werden müssen. Analytische Lösungen bzw. Abschätzungen sind nur in wenigen Spezialfällen möglich, bei denen F_0 und $\frac{\tilde{D}_0}{F_0}$ von bestimmtem Typ sind.

a) $v_{Alfvén} \sim v_{Strömung}$

Der einfachste Fall liegt vor, wenn gilt:

$$\frac{\tilde{D}_0}{\sqrt{4\pi}\, F_0} = \frac{\rho_0^{1/2}(k v_0)}{\sqrt{4\pi}\,(k B_0)} = h_0 \equiv \text{const.} < 1 \quad \text{, d.h.}$$

$$\frac{v_{Strömung}}{v_{Alfvén}} = \text{const.}$$

Aus (I.7.1)

(I.7.2) $$(1-k_0^2)\left[-\Delta \mathcal{B}^{(0)} + \frac{F_0''}{F_0}\mathcal{B}^{(0)}\right] = 0$$

Schließen wir wieder den singulären Fall $k_0 = 1$ aus, so erhalten wir eine Gleichung, in der k_0 nicht mehr vorkommt, die also auch im strömungslosen Fall gilt:

(I.7.3) $$-\mathcal{B}^{(0)''} + k^2 \mathcal{B}^{(0)} + \frac{F_0''}{F_0}\mathcal{B}^{(0)} = 0$$

Im Standardfall $F_0 \sim \tanh z/\ell$ und $a=-\infty$, $b=+\infty$ können wir nach [1] eine explizite Lösung für $\Delta'(k)$ angeben:

$$\Delta'(k) = \frac{2}{\ell^2}\left(\frac{1}{|k|} - \ell^2|k|\right) \qquad (\ell \text{ Schichtdicke})$$

Da $\Delta'(k)$ reell und $\omega_0 = 0$ ($\mathcal{B}_0(0) = 0$) erhalten wir:

$$\tilde{\omega} = \mathrm{Re}\,\omega = \left(\frac{\eta_0}{\pi\ell^2}\left(1-\ell^2|k|^2\,\frac{|k\,V_0'(0)|}{|k|}\left(1-\gamma_0^2\right)\right)\right)^{1/2}$$

Der marginale Mode (Stabilitätsgrenze) wird durch $\mathrm{Re}\,\omega = 1 - \ell^2 |k_0^{(0)}|^2 = 0$ definiert, also:

(I.7.8) $$k_0^{(0)\,2} = \ell^{-2}$$

Dabei ist

$$\mathcal{B}_0^{(0)} = \cosh^{-1}(z/\ell), \quad u_0^{(0)} = \frac{k_0}{\sqrt{\eta_0}}\cosh^{-1}\left(\frac{z}{\ell}\right)$$

Es folgt, daß die Stabilitätsgrenze $k_0^{(0)}$ unabhängig von der Stärke der Strömung ist. Das Ergebnis (I.7 8)ist nicht nur als nullte Näherung bzgl. des Widerstandes zu verstehen, sondern auch für beliebige η_0 gültig. Hierzu betrachten wir $\phi \equiv \sqrt{\eta_0}\,k_0 u - \mathcal{B}$ und sehen sofort aus (C.I.3.1) mit Reω=0und $\tilde{\omega}\beta_0^{1/2} + i\tilde{\mathcal{D}}_0 \equiv \omega\beta_0^{1/2} + i\mathcal{D}_0$,

daß ϕ folgender Gleichung genügt:

$$-\phi'' + k^2 \phi + \frac{F''}{F}\phi = 0$$

Diese Gleichung stimmt mit (I.7.3) überein, so daß sich derselbe Eigenwert k_0 ergibt.
Die Unabhängigkeit der Stabilitätsgrenze k_0 vom Widerstand für $V_{\text{Strömung}} \sim V_{\text{alphen}}$ ist natürlich nur in diesem Spezialfall (wie auch für $V_{\text{Strömung}} \equiv 0$) gegeben. Für allgemeine $V_{\text{Strömung}}$ gilt $k_0 = k_0(\eta_0)$.

b) $V_{\text{alphen}} \propto V_{\text{Strömung}}$

Im allgemeinen Fall ist eine explizite Lösung nicht mehr möglich. Wir können aber für kleine Abweichungen von der Konstanz von $\frac{V_{\text{Strömung}}}{V_{\text{alphen}}}$ die Änderung der Stabilitätsgrenze durch Störungsrechung ermitteln. Für größere Abweichungen finden wir wieder eine Eigenwertgleichung der Form $-\psi'' + k^2\psi + V\psi = 0$.

Hierzu definieren wir wieder:

$$k_0(z) \equiv \frac{\tilde{D}_0}{\sqrt{\eta_0} F_0} \quad \text{und erhalten aus (I.7.1)}$$

$$\Delta \mathfrak{Z}^{(0)} - \frac{(k_0^2)'}{1-k_0^2}\mathfrak{Z}^{(0)\prime} - \left(\frac{k_0 k_0'' - k_0^2 \frac{\tilde{D}_0''}{\tilde{D}_0} + \frac{F_0''}{F_0} k_0^2}{1-k_0^2} + \frac{F_0''}{F_0} \right)\mathfrak{Z}^{(0)} = 0 \qquad \text{(I.7.9)}$$

$$\Delta \equiv \frac{d^2}{dz^2} - k_0^{(0)2}$$

Wir beschränken uns auf die Berechnung des marginalen $k_0^{(0)}$ d.h. die Diskussion des Randwertproblems (I.7.9) mit Eigenwert $k_0^{(0)}$. Hierzu schreiben wir (I.7.9) um:

$$-\left(\frac{d^2}{dz^2} - k_0^{(0)2}\right)\mathfrak{Z}^{(0)} + \frac{F_0''}{F_0}\mathfrak{Z}^{(0)} + \frac{(k_0^2)'}{1-k_0^2}\left(\mathfrak{Z}^{(0)\prime} - \frac{F_0'}{F_0}\mathfrak{Z}^{(0)}\right) = 0 \qquad \text{(I.7.10)}$$

(für $k_0 \equiv$ const. ergibt sich wieder (I.7.3))

α) $|(h_0^2)'| \ll 1$

In diesem Fall können wir den 3. Term in (I.7.10) als kleine Störung auffassen, falls zusätzlich gilt:

1) $(1 - h_0^2) \geqq \delta > 0$

2) $(\mathcal{B}^{(0)\prime}(z)) \leqq C < \infty$

3) $\dfrac{|(h_0^2)'|}{|F_0|} \ll 1$

Für genügend glatte h_0 und $\widetilde{D}_0''(0) = 0$ $(\to 3)$ sind diese Voraussetzungen immer erfüllt und wir erhalten in linearer Störungsrechnung für die Verschiebung δk der Stabilitätsgrenze:

(I.7.11) $$2k_0^{(0)}\delta k = J \equiv -\int \frac{(h_0^2)'}{1-h_0^2} F_0^{-1}\left(F_0 \mathcal{B}_0^{(0)} \mathcal{B}_0^{(0)\prime} - F_0' \mathcal{B}_0^{(0)\,2}\right)$$

für $J < 0$: $\delta k < 0$ d.h. Stabilisierung

für $J > 0$: $\delta k > 0$ d.h. Destabilisierung

Für unseren Standardfall $F_0 \sim \tanh \frac{z}{l}$ war $\mathcal{B}_0^{(0)} = \cosh^{-1}(z/l)$ und somit:

$$\mathcal{B}^{(0)}\mathcal{B}^{(0)\prime} \quad \begin{matrix} \geqq 0 & z \leq 0 \\ \leqq 0 & z \geqq 0 \end{matrix}$$

$$-F_0^{-1}F_0' \quad \begin{matrix} \geqq 0 & z < 0 \\ \leqq 0 & z < 0 \end{matrix}$$

Es folgt $J \lesseqgtr 0$ für $(h_0^2)' \lesseqgtr 0$

d.h. Stabilisierung, wenn h_0^2 von $z=0$ weg abnimmt und Destabilisierung, wenn es zunimmt (siehe Abb. 13, 14)

Stabilisierung tritt also dann ein, wenn von der Nullebene weg die Magnetfeldenergie stärker zunimmt als die kinetische Energie der Strömung.

β) Sind die unter α) genannten Voraussetzungen nicht erfüllt, dann muß für das marginale $k_0^{(0)}$ die volle Gleichung (I.7.10) gelöst werden. Für $\tilde{J}_0(0)'' = 0$ gilt wieder $|(k_0^2)'/F_0| < \infty \quad (z \to 0)$

Schwierigkeiten treten an Stellen z_i auf, für die gilt $1 - k_0^2(z_i) = 0$. Da wir fordern, daß $|d_1| < \sqrt{4\pi}|f_1|$, treten solche Stellen nur für $z_i \neq 0$ auf, also fern von der Widerstandsschicht. Wir können dann, wie unter C.II.2 erläutert, Gleichung (I.7.11) auf einem Weg Γ_{ab} betrachten, der diese Nullstellen umgeht, wobei die unter C.I.3.d aufgestellten Einschränkungen zu beachten sind.

Mittels einer Transformation an $\psi \equiv p_0 B^{(0)} \equiv (1-k_0^2)^{1/2} B_0^{(0)}$ bringen wir die erste Ableitung in (I.7.10) zum Verschwinden und erhalten:

(I.7.12)
$$-\left(\frac{d^2}{dz^2} - k_0^{(0)2}\right)\psi + V_0(z)\,\psi = 0$$
$$V_0(z) \equiv \frac{F_0''}{F_0} + S_0(z), \quad S_0(z) = \frac{\rho_0''}{\rho_0} - \frac{(k_0^2)'}{1-k_0^2}\frac{F_0'}{F_0}$$

Durch die Strömung erhalten wir somit in (I.7.12) eine zusätzliche "potentielle" Energie $S_0(z)$. Der Eigenwert kann durch ein Variationsprinzip

$$\delta\left(\frac{\int \psi^*(W_0 + S_0)\psi\, dz}{\int \psi^* \psi}\right) = 0$$

mit $W_0 \equiv -\frac{d^2}{dz^2} + \frac{F_0''}{F_0}$ als strömungslosen Operator, berechnet werden.

Definieren wir:

$$S_0 = S_0^{(1)} + S_0^{(2)} \quad \text{mit} \quad S_0^{(1)} = \frac{\rho_0''}{\rho_0} \quad \text{und} \quad S_0^{(2)} = -\frac{(k_0^2)'}{1-k_0^2}\frac{F_0'}{F_0},$$

dann sehen wir, daß im Standardfall für $(k_0^2)' \lesseqgtr 0$ für $z \gtreqless 0$ (nach außen abfallendes k_0) gilt:

$$S_0^{(2)}(z) \geq 0 \quad \rightarrow \quad \int \psi^* S_0^{(2)} \psi \geq 0$$

Dieser Term wirkt also stabilisierend für nach außen abfallendes h_o^2 und, wie man leicht sieht, destabilisierend für nach außen zunehmendes h_o^2 . Es verbleibt der Einfluß von $S_o^{(1)}$, der nicht so einfach abgeschätzt werden kann, da $\frac{\rho_o'}{\rho_o}$ im allgemeinen oszillierend ist. Aus diesem Grund aber kann angenommen werden, daß für eine große Klasse von Profilen der Einfluß von $S_o^{(2)}$ dominiert.

Wir bemerken noch, daß für konstanten Geschwindigkeitsgradienten, aber von der Nullebene weg genügend stark abnehmende Dichte, h_o^2 ebenfalls abnimmt und damit $S_o^{(2)}$ stabilisierend wirkt.

Die stabilisierende Wirkung von $S_o^{(2)}$ verschwindet,wenn der Abfall von h_o^2 in den Bereich fällt, wo $F_o \approx$ const.

II. Konstante Strömungsgeschwindigkeit in der Widerstandsschicht.

Sei nun $\widetilde{D}_0'(0) = 0$, d.h. in der Nullebene des Magnetfeldes verschwinde der Strömungsgradient (bzw. $\nabla(\rho_0^{1/2} v_0)$ für nicht konstante Dichte).

Wir betrachten wieder:

$$\widetilde{D}_0(z) = d_2 z^2 + O(z^3)$$

$$F_0(z) = f_\wedge z + O(z^3)$$

Sei im folgenden $d_2 \neq 0$ (für $d_2 = 0$ bleibt die nachfolgende Diskussion im wesentlichen die gleiche).

1. Singuläre Stellen

In der Nähe von $z = 0$ treten nunmehr, wegen der Nullstelle 2. Ordnung von $\widetilde{D}_0(z)$, zwei Reibungs-Singularitäten auf (gemäß C.I.3.3):

$$\widetilde{\omega} + i d_2 z_v^{(1,2)2} = 0$$

$$z_v^{(1,2)} = \pm \left(\frac{i\widetilde{\omega}}{d_2} \right)^{1/2}$$

Nach (C.I.4.5) sind die Widerstands-Singularitäten definiert durch:

$$\omega + i d_2 z_w^{(1,2)2} = \pm \sqrt{4\pi} f_\wedge z_w^{(1,2)} \quad , \quad z_w^{(0)} = 0$$

Da wir $z_w \approx 0$ suchen, ist der Beitrag von $d_2 \cdot z_w^{(1,2)2}$ höherer Ordnung und wir erhalten in niedrigster Ordnung:

$$z_w^{(1,2)} = \frac{i\widetilde{\omega}}{\pm f_\wedge \sqrt{4\pi}} \quad , \quad z_w^{(0)} = 0$$

(siehe Abb. 16, 8)

Für $|\tilde{\omega}| \to 0 \quad (\eta_0 \to 0)$ gilt:

$$\left| \frac{z_\nu^{(1,2)}}{z_w^{(1,2)}} \right| \sim |\tilde{\omega}|^{-1/2} \to \infty \quad (\eta_0 \to 0) \ ,$$

d.h. die Widerstands-Singularitäten $z_w^{(1,2)}$ liegen "wesentlich" näher an der reellen Achse, als die Reibungs-Singularitäten $z_\nu^{(1,2)}$.

2. Singularitäten der hydromagnetischen Näherung.

Nach C.II.1.e haben wir:

(II.2.1) $$B^{(0)} = B_0^{(0)} + B_2^{(0)\pm} z + \dots$$

(II.2.2) $$u^{(0)} = \frac{d_2}{4\pi f_1} B_0^{(0)} z + \frac{d_3}{4\pi f_1} B_0^{(0)} + \frac{d_2 B_2^{(0)}}{4\pi f_1} z^2 + \dots$$

Wegen $d_1 = 0$ tritt eine Singularität der Art $z \ln z$ nicht auf.

$B^{(1)}, u^{(1)}$ genügen (C.II.1. 14,15). Um die Singularitäten bei $z = 0$ zu erhalten, schreiben wir die dort führenden Terme an:

$$if_1 z B^{(1)\,\prime\prime} = 2\left(\frac{d_3 B_0^{(0)}}{4\pi f_1} + \frac{d_2 B_2^{(0)\pm}}{4\pi f_1} \right) + d_2 z^2 \left(\frac{B_0^{(0)}}{4\pi f_1 z} \right)'' - d_2 \frac{B_0^{(0)}}{2\pi f_1 z} - d_2 \frac{B_2^{(0)\pm}}{2\pi f_1} + O(z)$$

$$if_1 z B^{(1)\,\prime} = \frac{d_3 B_0^{(0)}}{2\pi f_1} + O(z)$$

(II.2.3) $$B^{(1)} = -i \frac{d_3 B_0^{(0)}}{2\pi f_1^2} z \ln z + O(z)$$

(Für $d_3 = 0$ verschwindet auch diese Singularität).

(II.2.4) $$u^{(1)} = \frac{B_0^{(0)}}{4\pi i f_1}\,\frac{1}{z} - i\,\frac{d_2 d_3}{8\pi^2 f_1^3}\,B_0^{(0)}\,z^2 \ln z + O(z)$$

3. Skalierung in der Widerstandsschicht.

Aus (C.II.3.2/3) erhalten wir mit $d_1 = 0$:

(II.3.1) $$\tilde{\omega}\,u'' + i\varepsilon^2 d_2 \zeta^2 u'' - 2i\varepsilon^2 d_2 u = i\varepsilon f_1 \zeta \mathcal{B}''$$

(II.3.2) $$\eta_0 \mathcal{B}'' = \tilde{\omega}\varepsilon^2 \mathcal{B} + i\varepsilon^4 d_2 \zeta^2 \mathcal{B} - 4\pi i \varepsilon^3 f_1 \zeta u$$

ε muß wieder so gewählt werden, daß einzelne Terme der WSE an entsprechende Terme der HME angeschlossen werden können.

Wir schreiben (II.3.1) in der Form

(II.3.3) $$\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\,u'' + i\varepsilon d_2 \zeta^2 u'' - 2i\varepsilon d_2 u = i f_1 \zeta \mathcal{B}''$$

Nach (II.2.1) ist $\bar{\mathcal{B}}^{(0)} = B_0^{(0)}$

Nach (II.2.1/3) sind die niedrigsten nichtkonstanten Ordnungen $\sim z$, $\sim z \ln z$; dies bedeutet, wegen $z = \varepsilon\zeta$, daß die niedrigsten nichtkonstanten Terme von $\mathcal{B}$ in der WSE von der Ordnung ε sein müssen. Somit:

$$\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\,u'' \sim O(\varepsilon)$$

Da weiterhin $\bar{u}^{(0)} \equiv 0$ (wegen (II.2.2)), folgt, daß $u''(\zeta)$ von höherer Ordnung

$$\rightarrow \left|\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right| \gg \varepsilon \quad (\varepsilon \to 0)$$

Da nach (II.2.4) eine Singularität der Ordnung $\frac{\tilde{\omega}}{z} = \frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\,\frac{1}{\zeta}$ in u auftritt, muß gelten:

$$u''(\zeta) \sim O\left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right)$$

(II.3.4) $$\rightarrow \left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right)^{\sim} \sim O(\varepsilon)$$

Wir wählen deshalb $\tilde{\omega}/\varepsilon$ als Entwicklungsparameter und erhalten aus (II.3.3) als niedrigste nicht verschwindende Ordnung:

$$\bar{u}^{(1)\,\prime\prime} = i f_n \int \bar{\mathcal{B}}^{(2)\,\prime\prime} \quad , \quad \bar{\mathcal{B}}^{(1)} \equiv 0 \, .$$

Wir schreiben statt (II.3.2):

$$\frac{\eta_0}{\varepsilon^3}\,\mathcal{B}'' = \frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\,\mathcal{B} + i\varepsilon\, d_2 \int^2 \mathcal{B} - 4\pi i f_n \int u$$

Da $u(\zeta) \sim O\left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right)$, folgt

$$\frac{\eta_0}{\varepsilon^3}\,\mathcal{B}'' \sim O\left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right)$$

Wegen $\mathcal{B}''(\zeta) \sim O(\varepsilon)$ folgt

$$\frac{\eta_0}{\varepsilon^3}\,\varepsilon \sim O\left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right) \sim O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

Somit haben wir durch Anpassung der Singularitäten beider Entwicklungen den Parameter ε festgelegt und definieren nun

(II.3.5) $$\eta_0^2 = \tau_0^2\, \varepsilon^5 \qquad (\tau_0 \sim O(1))$$

und die unendlichen Reihen

(II.3.6) $$\mathcal{B}(\zeta) = \bar{\mathcal{B}}^{(0)} + \frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\bar{\mathcal{B}}^{(1)} + \left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right)^2 \bar{\mathcal{B}}^{(2)} + \ldots .$$

(II.3.7) $$u(\zeta) = \frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\,\bar{u}^{(1)} + \left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right)^2 \bar{u}^{(2)} + \ldots \quad ,$$

wobei die Gleichungen (II.3.3) und

(II.3.8) $$\tau_0\, \varepsilon^{-1/2}\, \mathcal{B}'' = \frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\,\mathcal{B} + i\varepsilon\, d_2 \int^2 \mathcal{B} - 4\pi i f_n \int u$$

gelten.

4. Lösung der Störungsgleichungen. Konvergenz. Gemeinsamer Konvergenzbereich.

Es sind $\bar{u}^{(0)} \equiv 0$

$\bar{B}^{(0)} \equiv B_0^{(0)} = \text{const.}$

$\bar{B}^{(1)} \equiv 0$

(II.4.1) $\bar{u}^{(1)''} = i f_\infty \int \bar{B}^{(2)''}$

(II.4.2) $\lambda \bar{B}^{(2)''} = B_0^{(0)} - 4\pi i f_\infty \int \bar{u}^{(1)}$,

wobei $\lambda = \tau_0 \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\varepsilon}} \varepsilon^{-1/2}$

$\rightarrow \bar{u}^{(1)''} = i f_\infty \int \lambda^{-1} \left(B_0^{(0)} - 4\pi i f_\infty \int \bar{u}^{(1)} \right)$

(II.4.3) $\bar{u}^{(1)''} - 4\pi f_\infty^2 \lambda^{-1} \int^2 u^{(1)} = i f_\infty \int \lambda^{-1} B_0^{(0)}$

(II.4.1,2,3) enthalten keine strömungsabhängigen Terme mehr und stimmen mit den Gleichungen überein, die [1] im strömungslosen Fall erhielten.

(II.4.3) hat eine reguläre Lösung $\bar{u}^{(1)}$ mit

$$\bar{u}^{(1)} = \frac{B_0^{(0)}}{4\pi i f_\infty} \frac{1}{\zeta} + o\left(\frac{1}{\zeta^3}\right) \qquad (|\zeta| \to \infty, \operatorname{Im}\zeta = 0)$$

(II.4.2) hat eine reguläre Lösung $\bar{B}^{(2)}$ mit dem asymptotischen Verhalten

$$\bar{B}^{(2)}(\zeta) = a^{\mp} \cdot \zeta + o\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \qquad (\zeta \to \pm\infty, \operatorname{Im}\zeta = 0)$$

Der Sprung der asymptotischen Ableitung von $\bar{B}^{(2)}$ ergibt sich nach (II.4.1.):

$$\Delta \bar{B}^{(2)'} = -\frac{i}{f_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{u}^{(1)''}}{\zeta} \, d\zeta$$

Die Berechnung dieses Integrals kann nicht mehr funktionentheoretisch wie in D.I erfolgen, da die asymptotische Formel $\bar{u}^{(1)} \sim \frac{1}{\zeta}$ $(|\zeta| \to \infty)$ jetzt nicht mehr in einem Sektor gilt, der die reellen Punkte $+\infty$, $-\infty$ enthält. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, daß in der homogenen Gleichung (II.4.3) bei $\bar{u}^{(1)}$ der quadratische Koeffizient ζ^2 auftritt, wodurch die komplexe Ebene durch vier Stokes- bzw. Antistokeslinien aufgeteilt wird ($\zeta = 0$ Wendepunkt 2. Ordnung),

gegenüber drei bei der Gleichung (I.4.5) (ζ = 0 Wendepunkt 1.Ordnung). Die homogene Gleichung (II.4.3) ist bekannt als Weber'sche Differentialgleichung ($\longrightarrow$ *parabolische* Zylinderfunktionen, siehe [10]).

Wir verzichten auf die explizite Berechnung von $\bar{u}^{(1)}$, $\bar{B}^{(2)}$ und damit $\Delta\,\bar{B}^{(2)}$, da dies bereits in 1 ausgeführt wurde und beschränken uns auf den Nachweis der Konvergenz der durch (II.3.4 - 7) definierten WSE. Hierzu schreiben wir die Rekursionsbeziehungen für die einzelnen Ordnungen an:

(II.4.4) $$\bar{u}^{(n-1)''} + i\gamma^{-2} d_2 \zeta^2 \bar{u}^{(n-2)''} - 2i d_2 \bar{u}^{(n-2)} = i\zeta f_1 \bar{B}^{(n)''} + i\gamma^{-2} f_1 \zeta^2 \bar{B}^{(n-2)''} - 2\gamma^{-2} f_2 \bar{B}^{(n-2)}$$

(II.4.5) $$\tau_0 \gamma \bar{B}^{(n)''} = \bar{B}^{(n-2)} + \gamma^{-2} d_2 \zeta^2 \bar{B}^{(n-3)} - 4\pi i f_1 \zeta \bar{u}^{(n-1)} - 4\pi i \gamma^{-2} f_2 \zeta^2 u^{(n-3)}$$

mit $\varepsilon = \gamma^{-2}\left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right)^2$, $\varepsilon^{-1/2} = \gamma \frac{\varepsilon}{\tilde{\omega}}$

aus (II.4.4):

(II.4.6) $$\bar{B}^{(n)''} \lesssim O\left(\frac{\bar{u}^{(n-1)}}{\zeta} , \zeta \bar{u}^{(n-2)''} , \zeta \bar{B}^{(n-2)''} , \frac{\bar{u}^{(n-2)}}{\zeta} , \frac{\bar{B}^{(n-2)}}{\zeta} \right)$$

(II.4.7) $$\longrightarrow \bar{B}^{(n)} \lesssim O\left(\bar{u}^{(n-1)} , \zeta^2 \bar{u}^{(n-2)} , \zeta^2 \bar{B}^{(n-2)} , \zeta \right)$$

(mit (I.4.24))

ferner aus (I.4.5) :

$$\bar{u}^{(n-1)} \lesssim O\left(\frac{\bar{B}^{(n)''}}{\zeta} , \frac{\bar{B}^{(n-2)}}{\zeta} , \zeta \bar{B}^{(n-3)} , \zeta \bar{u}^{(n-3)} \right)$$

mit (I.4.6):

$$\bar{u}^{(n-1)} \lesssim O\left(\frac{\bar{u}^{(n-1)}}{\zeta^4} , \frac{\bar{u}^{(n-2)}}{\zeta} , \frac{\bar{B}^{(n-2)}}{\zeta} , \zeta \bar{B}^{(n-3)} , \zeta \bar{u}^{(n-3)} \right)$$

Beachten wir, daß $\bar{u}^{(1)} \lesssim O(1)$, $\bar{B}^{(1)} \lesssim O(1)$, $\bar{B}^{(2)} \lesssim O(\zeta)$ ($|\zeta| \longrightarrow \infty$) , dann sehen wir mittels (I.4.6,7) die Richtigkeit folgender Abschätzung:

$$\bar{B}^{(n)} \lesssim (C_1 \zeta)^{(n)}$$
$$\bar{u}^{(n)} \lesssim (C_2 \zeta)^n \qquad (|\zeta| \to \infty)$$

Damit haben wir die gleiche Abschätzung wie unter I.4.d und setzen als Konvergenzbereich wieder

$$r \leq |\zeta| \leq R^* \varepsilon^{-1/4} \quad , \quad \zeta \in T_R^{++}$$

Für den Konvergenzbereich der HME setzen wir wieder $\delta = \varepsilon^{3/4}$, womit die Bedingung (C.II.1.7) erfüllt ist:

$$\left|\frac{\hat{\omega}}{\delta}\right| \sim \varepsilon^{3/4} \to 0$$

$$\frac{\eta_0}{\delta^3} \sim \varepsilon^{1/4} \to 0$$

Hiermit erhalten wir den gleichen Überlappungsbereich wie in I.5, so daß auf ganz T_{ab} jede Partialsumme von (II.3.6,7) (insbesondere also wieder die hydromagnetische Näherung) gleichmäßig die exakte Lösung approximiert ($\eta_0 \to 0$).

5. Dispersionsbeziehung

Ein Vergleich von (II.2.1) und (II.4.3) liefert wieder die Dispersionsbeziehung:

$$\left(b_2^{(0)+} - b_2^{(0)-}\right)\varepsilon = \left(a^+ - a^-\right)\left(\frac{\hat{\omega}}{\varepsilon}\right)^2$$

oder, mit $\Delta'(k) = \dfrac{b_2^{(0)+} - b_2^{(0)-}}{b_0^{(0)}}$

$$\Delta'(k)\,\varepsilon = \Delta\,\bar{B}^{(2)\prime}\left(\frac{\hat{\omega}}{\varepsilon}\right)^2$$

$$\hat{\omega}^2 = \varepsilon^3\,\Delta'(k)\,b_0^{(0)}$$

$$\hat{\omega} = \left(\frac{\eta_0}{\tau_0}\right)^{3/5}\left(\frac{\Delta'(k)\,b_0^{(0)}}{\Delta\,\bar{B}^{(2)\prime}}\right)^{1/2} \qquad \text{(II.5.1)}$$

in Übereinstimmung mit [1].

Es sei noch bemerkt, daß hier $\Delta'(k)$ wie in I.7 wieder von $\widetilde{D}_0(z)$ abhängt, wohingegen $\Delta\overline{B}^{(2)\prime}$ unabhängig von der Strömung ist.

6. Lösung im idealen Bereich. Marginale Moden.

$\Delta'(k)$ ergibt sich wieder aus der idealen Gleichung (I.7.1):

$$-\frac{\widetilde{D}_0}{4\pi}\Delta\left(\frac{\widetilde{D}_0}{F_0}B^{(0)}\right)+\widetilde{D}_0''\frac{\widetilde{D}_0}{4\pi F_0}B^{(0)}=-F_0\Delta B^{(0)}+F_0''B^{(0)}$$

die, wie unter I.7, als Anfangswertproblem vom linken bzw. rechten Rand her, gelöst wird. Da für die hier in Frage kommenden $\widetilde{D}_0$ keine einfache analytische Lösung dieses Anfangswertproblems möglich ist, beschränken wir uns auf eine Diskussion des Randwertproblems für den marginalen Mode ($\Delta'(k)=0$).
Wie in I.7 definieren wir:

$$k_0\equiv\frac{\widetilde{D}_0}{\sqrt{4\pi F_0}}\quad,\quad \rho_0\equiv\left(1-k_0^2\right)^{1/2},\quad \psi\equiv\rho_0 B^{(0)}$$

wobei wir Nullstellen von ρ_0 die jetzt nur bei $z\neq 0$ auftreten können, durch eine geeignete Kontur Γ_{ab} umgehen.
Es ergibt sich wieder:

$$-\left(\frac{d^2}{dz^2}-k_0^{(0)2}\right)\psi+V_0\psi=0$$

mit V_0 wie in (I.7.12).

a) Da jetzt $k_0(0)=0$, diskutieren wir zunächst als einfachsten Spezialfall $k_0(z)=a_0 z$, entsprechend symmetrischem $\widetilde{D}_0$ (siehe Abb.15).
Sei zunächst a_0 so klein, daß überall gilt:

$$k_0^2(z)<1\quad,\Rightarrow \rho_0(z)>0$$

Es ist dann

$$\frac{k_0^{2\,\prime}}{1-k_0^2} = \frac{2a_0^2 z}{1-a_0^2 z^2} \quad , \qquad \frac{\rho_0''}{\rho_0} = -\frac{a_0^2}{1-a_0^2 z^2} - \frac{a_0^4 z^2}{(1-a_0^2 z^2)^2} < 0$$

ferner, im Standardfall,

$$-\frac{k_0^{2\,\prime}}{1-k_0^2}\,\frac{F_0'}{F_0} < 0$$

Es folgt $S_0(z) < 0$ und somit Destabilisierung.
Sei nun a_0 so groß, daß innerhalb des Intervalls (a,b) bei $z = +\mu\,, -\mu$ Nullstellen von $1 - k_0^2(z)$ auftreten (siehe Abb. 8).
Für instabile Moden ist die Lage der Singularitäten gemäß (C.I.4.5):

$$z \mp \mu = \frac{-iw}{4\pi F_0'(\pm\mu) - \hat{D}_0'(\pm\mu)}$$, so daß der Integrationsweg gemäß Abb.11 gewählt wird.
Auf der reellen Achse hat $S_0^{(2)} = -\frac{F_0'}{F_0}\,\frac{(k_0^2)'}{1-k_0^2}$ in der Nähe der Singularitäten ein Verhalten der Art $S_0^{(2)} \sim \frac{\Lambda}{z-(\pm\mu)}$. Dies bedeutet auf $\Gamma_{a,b}$ ein oszillierendes Verhalten (Abb.12). Dieser oszillierende Beitrag zu $S_0^{(2)}$ hat i.a. nur schwachen Einfluß auf den Eigenwert $k_0^{(0)}$.

$S_0^{(1)}$ besitzt bei $z = \pm\mu$ einen Pol 2. Ordnung und es gilt $\rho_0''/\rho_0 < 0$ für alle z, da $\rho_0''/\rho_0 \neq 0$ und $\rho_0''/\rho_0\big|_{z=0} = -a_0^2$

Wie aus Abb.13 ersichtlich, liefern diese Singularitäten einen negativen Beitrag zu $\mathrm{Re}\ S_0^{(1)}$, d.h. sie bewirken Destabilisierung.

b) <u>Parabolisches Geschwindigkeitsprofil</u>

Ein physikalisch realistischeres Geschwindigkeitsprofil wird durch $V_0(z) = V - \frac{4V}{(b-a)^2} z^2$; $V_0(a) = V_0(b) = 0$, $V_0(0) = V$ gegeben (siehe Abb.16).

Es folgt $\omega_0^{(0)} = -(kV)$ als marginale Phasengeschwindigkeit und

$$\widetilde{D}_0 = -\rho_0^{1/2}(z)\,\frac{4(kV)}{(b-a)^2}\,z^2$$

Für $\rho_0(z) \equiv 1$ ist h_0^2 im Standardfall nach außen zunehmend (Abb.14), wobei wir annehmen, daß V so klein ist, daß $h_0^2(z) < 1$ (also S_0 nicht singulär wird). In diesem Fall ist aber $S_0^{(2)}$ gemäß I.7.b.ß destabilisierend. Im allgemeinen nimmt jedoch die Dichte, also auch $\rho_0^{1/2}(z)$, nach außen stark genug ab, so daß auch $h_0^2(z)$ nach außen abklingt (siehe Abb.14). Dieses Abklingen von h_0^2 liefert aber nach I.7.b.ß einen stabilisierenden Beitrag. Das Zusammenwirken dieser Effekte muß numerisch ausgewertet werden (siehe Anhang III).

III. Übergang zu modifizierten Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten

Die in I.5. abgeleitete Anwachsrate $\mathrm{Re}\,\tilde{\omega}$ verschwindet für $\left| d_1 / 4\pi f_1 \right| = \left| \tilde{D}_0'(0) / 4\pi F_0'(0) \right| \longrightarrow 1$. In diesem Fall versagt die in D.I. abgeleitete Skalierung von $\tilde{\omega}\,(\eta_0)$.

Wir beschränken uns hier auf eine Diskussion des Falls $\tilde{D}_0(z) \sim F_0(z)$, insbesondere sei

$\tilde{D}_0(0) = F_0(0) = D_0''(0) = F_0''(0) = 0$

1) Sei $\tilde{D}_0^2(z) = 4\pi \cdot F_0^2(z)$, dann, nach (C.I.3.1/2)

$$u = \frac{B}{\sqrt{4\pi}} + \frac{\tilde{\omega}\,\rho_0^{1/2}}{4\pi i F_0} B + i \frac{\eta_0 \rho_0^{1/2}}{16\pi^2 F_0} \Delta B$$

$$- \tilde{\omega} \rho_0^{1/2} \Delta \left(\frac{B}{\sqrt{4\pi}} + \frac{\tilde{\omega}\rho_0^{1/2}}{4\pi i F_0} B \right) - \tilde{D}_0 \Delta \left(\frac{\tilde{\omega}\rho_0^{1/2}}{4\pi i F_0} B \right) + \left(\tilde{\omega}\rho_0^{1/2} + i \tilde{D}_0 \right)'' \frac{\tilde{\omega}\rho_0^{1/2}}{4\pi i F_0} B + \omega \rho_0^{1/2\,''} B =$$

$$\eta_0 \left[\tilde{\omega}\rho_0^{1/2} + i D_0 \right] \Delta \left(\frac{\rho_0^{1/2} i \Delta B}{16\pi^2 F_0} \right) + \left(\omega \rho_0^{1/2} + i D_0 \right)'' \frac{i \rho_0^{1/2}}{16\pi^2 F_0} \Delta B \Big]$$

Da keine Terme O-ter Ordnung gegenüber $\tilde{\omega}, \eta_0$ auftreten, ist diese Gleichung von der Form

$\omega L_1 B + \eta_0 L_2 B + O(\omega^2, \eta_0 \cdot \omega, \ldots)$

Damit gilt $\omega \sim O(\eta_0)$, d.h. es tritt eine diffusionsartige Zeitabhängigkeit auf. Dieser singuläre Fall führt also höchstens zu einem benachbarten quasistationären Gleichgewicht.

2) $\tilde{D}_0^2(z) = k_0^2\, 4\pi F_0^2(z)$, $k_0 > 1$

Die marginale Gleichung und damit auch $k_0^{(0)}$, d.h. die Stabilitätsgrenze, bleiben unverändert gegenüber $k_0 < 1$. Wie in C.III. diskutiert, geht für $\eta_0 \longrightarrow 0$ $\tilde{\omega}$ nicht gegen Null, d.h. $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(k) + O(\eta_0)$. Für $k_0 \longrightarrow \infty$ geht diese Lösung in die reine Kelvin-Helmholtz-Instabilität paralleler Strömungen über.

E. Zusammenfassung

Eine analytische Untersuchung der linearisierten Störungsgleichungen für den Schichtpinch mit verscherter Strömung und verschertem Magnetfeld lieferte im wesentlichen folgende Ergebnisse:

1. Die Vernachlässigung des elektrischen Widerstands bzw. der Viskosität führt zu Singularitäten der Störungsgleichungen in der komplexen Ebene an Stellen, wo lokal die Alfvéngeschwindigkeit verschwindet, und wo (im Bezugssystem der Störung) die Strömungsgeschwindigkeit verschwindet oder gleich der Alfvéngeschwindigkeit ist.
   Die relative Lage der Singularitäten ist typisch für die Natur der möglichen Instabilitäten (Reibungsinstabilitäten, Widerstandsinstabilitäten, ideale Instabilitäten).

2. Für die Tearing-Instabilitäten wurden die Lösung der Störungsgleichungen (ohne Viskosität) in Form von unendlichen Reihen angesetzt, wobei der Entwicklungsparameter eine geeignete (gebrochene) Potenz des Widerstandes war. In einer dünnen Widerstandsschicht mußte dabei eine andere Entwicklung durchgeführt werden als im Restbereich. Es zeigte sich, daß das Bestehen eines Strömungsgradienten in dieser Schicht maßgebend für das Verhalten der Lösung bei $\eta_0 \to 0$ ist. Die gleichmäßige Konvergenz der Entwicklungen in geeignet definierten Bereichen der komplexen Ebene wurde nachgewiesen und die niedrigsten Entwicklungsordnungen explizit berechnet.

3. Für kleine η_0 ergaben sich Anwachsraten, deren asymptotisches Verhalten ($\eta_0 \to 0$) entscheidend davon abhing, ob in der Nullebene des Magnetfeldes ($k \cdot B_0(z_0) = 0$) ein Strömungsgradient ($k \cdot v_0'(z_0)$) vorhanden war.

In diesem Fall erhielten wir Anwachsraten

$\omega_{Str.} \approx \tau_R^{-1/2} \tau_{Kelv.-Helmh.}^{-1/2} \quad \left(\tau_R \sim \eta_0^{-1} \,,\; \tau_{Kelv.-Helmh.} \sim V_0'(z_0)^{-1} \right)$

mit einem maximalen Wert $\omega_{Str.max} \approx \tau_R^{-1/2} \cdot \tau_H^{-1/2}$

(τ_H hydromagnetische Zeit).

Demgegenüber ergab sich für $k V_0'(z_0) = 0$ wie im strömungslosen Fall [1] größenordnungsmäßig $\omega \approx \tau_R^{-3/5} \cdot \tau_H^{-2/5}$

Typische Zeiten für einen "inversen stabilisierten Pinch" sind nach [1] $\tau_R \approx 20\,\mu sec$, $\tau_H \approx 0.2\,\mu sec$

In diesem Fall ergeben sich für die Tearing-Instabilitäten typische Zeiten von $\tau_{Str.max} \approx 2\,\mu sec$

als Maximum bzw. strömungslos

$\tau \approx 3\,\mu sec$

Diese Übereinstimmung in den typischen Anwachszeiten geht theoretisch verloren für $\tau_R \to \infty$ $(\eta_0 \to 0)$, da gilt $\frac{\tau}{\tau_{Str.max}} \approx \left(\frac{\tau_R}{\tau_H}\right)^{1/10} \to \infty$ $(\eta_0 \to 0)$ (ungeachtet der Frage, inwieweit für $\eta_0 \to 0$ unser MHD-Modell anwendbar bleibt).

Für festes η_0 wird obiger Ausdruck für $\omega_{Str.}$ ungültig, wenn durch zu kleine Strömungsgradienten gilt $\tau_{Str.} \gg \tau$. In diesem Fall ist als führender Term in der Anwachsrate der strömungslose Ausdruck ω zu nehmen.

4. Die Stabilitätsgrenze (maximales k) hängt entscheidend von dem Strömungsprofil über die ganze Plasmaschicht ab. Ein von der Nullebene des Magnetfelds weg abfallender Quotient $\frac{\text{Strömungsenergie}}{\text{Magnetfelden ergie}}$ zeigte sowohl durch analytische Diskussion als auch in der numerischen Auswertung (Anhang III) stabilisierenden Einfluß. Nahm dieser Quotient nach außen hin zu, trat Destabilisierung ein.

Dabei wird die Strömungsenergie im Bezugssystem der Störung berechnet. Es zeigte sich, daß die Phasengeschwindigkeit, mit der sich die Störung ausbreitet, für $\eta_0 \to$ mit $k \cdot V_0(z_0)$ übereinstimmt. Die Tearing-Instabilität breitet sich also mit der lokalen Strömungsgeschwindigkeit (in der Nullebene des Magnetfeldes) aus.

Herrn Prof. Dr. D. Pfirsch danke ich für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit und für wertvolle kritische Gespräche. Den Mitarbeitern der Abteilung Theorie des Instituts für Plasmaphysik bin ich für anregende Diskussionen, sowie Frau Walter für die Ausführung der Programmierarbeiten und Frau Alsch für das Schreiben des Manuskripts sehr verbunden.

Literatur:

[1] H.P. Furth, J.Killeen, M.N.Rosenbluth, Phys. Fluids 6, 459 (1963)

[2] K. Aitken, R.Bickerton, R.Hardcastle, J.Jukes, P.Reynolds, IAEA Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Salzburg, Austria (1961), paper 68.

[3] E.M.Barston, Phys.Fluids 12, 2162 (1969)

[4] E.T.Karlson, Phys.Fluids 6, 708 (1963)

[5] S.Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford University Press (1961)

[6] C.C.Lin, The Theory of Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press (1967)

[7] W.Wasow Ann.Math. 49, 852 (1948)

[8] D.D.Mallick, J.Fluid Mech. 16,187 (1963)

[9] S.Abas, J.Fluid Mech. 32, 721 (1968)

[10] J.Heading, An Introduction to Phase-Integral Methods, Methuen Verlag (1962)

[11] W.H.Reid, Basic Developments in Fluid Dynamics (editor M.Holt), Academic Press (1965), Vol.I, S.249 ff.

[12] W.Wasow, Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations, Intersc.Publ. (1965)

[13] W.Tollmien, Z.Angew.Math.Mech.25/27, 33 (1947)

Anhang I

Tearing-Moden für den Fall $F_0''(0) \neq 0$

Liegt nicht der "Standardfall" mit $F_0''(0) = 0$ vor, dann erhalten wir in C II.1.e :

$$F_0 = f_1 z + f_2 z^2 + \dots$$

$$\tilde{D}_0 = d_1 z + d_2 z^2 + \dots$$

$$\frac{\tilde{D}_0}{4\pi F_0} = \frac{d_1}{4\pi f_1} + \left(\frac{d_2}{4\pi f_1} - \frac{d_1 f_2}{4\pi f_1^2}\right) z + \dots$$

und die Enwicklungen:

$$\mathcal{B}^{(0)} = b_0^{(0)} + b_1^{(0)} z \ln z + b_2^{(0)} z + \dots$$

$$u^{(0)} = \frac{d_1}{4\pi f_1} b_0^{(0)} + \frac{d_1}{4\pi f_1} b_1^{(0)} z \ln z + \left[\frac{d_1}{4\pi f_1} b_2^{(0)} + \left(\frac{d_2}{4\pi f_1} - \frac{d_1 d_2}{4\pi f_1^2}\right) b_1^{(0)}\right] z + \dots$$

$$\text{mit} \quad b_1^{(0)} = 2\,\frac{4\pi f_1 f_2 - d_1 d_2}{4\pi f_1^2 - d_1^2}\, b_0^{(0)}$$

Für die Entwicklung in der singulären Schicht (WSE) gemäß C II.3 erhalten wir:

$$\hat{\omega} u'' + i\varepsilon(d_1 + \varepsilon d_2 \int + \dots)\int u'' - i\varepsilon^2 (2 d_2 + \dots) u$$
$$= i\varepsilon (f_1 + \varepsilon f_2 \int + \dots)\int \mathcal{B}'' - i\varepsilon^2 (2 f_2 + \dots)\mathcal{B}$$

$$\eta_0 \mathcal{B}'' = \tilde{\omega}\varepsilon^2 \mathcal{B} + i\varepsilon^3 (d_1 + \varepsilon d_2 \int + \dots)\int \mathcal{B} - 4\pi i \varepsilon^3 (f_1 + \varepsilon f_2 \int)\int u$$

a) Für den in D.I. behandelten Fall mit Strömungsgradient in der Widerstandsschicht erhalten wir für $f_2, d_2 \neq 0$

$$\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} u'' + i d_1 \int u'' + i\varepsilon d_2 \int^2 u'' - 2 i \varepsilon d_2 u = i f_1 \int \mathcal{B}'' - 2 i \varepsilon f_2 \mathcal{B}$$

$$\eta_0 \mathcal{B}'' = \frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} \mathcal{B} + i d_1 \int \mathcal{B} + i\varepsilon d_2 \int^2 \mathcal{B} - 4\pi i f_1 \int u - 4\pi i \varepsilon f_2 \int^2 u$$

Wir führen wieder eine Entwicklung in Potenzen von $\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}$ durch, mit $\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(|\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}|^2\right)$

Die Zusatzterme proportional d_2 bzw. f_2 wirken sich nur auf die Terme 2. Ordnung $\bar{B}^{(2)}$, $\bar{u}^{(2)}$ aus und wir erhalten mit $\left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon \gamma^2$:

$$\bar{u}^{(1)''} + i d_1 \int \bar{u}^{(2)''} + i\gamma^{-2} d_2 \bar{u}^{(0)''} - 2i\gamma^{-2} d_2 \bar{u}^{(0)} = i f_1 \int \bar{B}^{(2)''} - 2i\gamma^{-2} f_2 \bar{B}^{(0)}$$

$$\tau_0 \bar{B}^{(2)''} = \bar{B}^{(1)} + i d_1 \int \bar{B}^{(2)} + i\gamma^{-2} d_2 \int^2 \bar{B}^{(0)} - 4\pi i f_1 \int \bar{u}^{(2)} - 4\pi i \gamma^{-2} f_2 \int^2 \bar{u}^{(0)}$$

mit $\bar{u}^{(0)''} \equiv \bar{B}^{(0)''} \equiv 0$ und $\gamma_1 \equiv 2i\gamma^{-2}\left(d_2 \bar{u}^{(0)} - f_2 \bar{B}^{(0)}\right)$, $\gamma_2 \equiv i\gamma^{-2}\left(d_2 \bar{B}^{(0)} - 4\pi f_2 \bar{u}^{(0)}\right)$

$$i d_1 \int \bar{u}^{(2)''} - i f_1 \int \bar{B}^{(2)''} = -\bar{u}^{(1)''} + \gamma_1$$

$$\tau_0 \bar{B}^{(2)''} - i d_1 \int \bar{B}^{(2)} + 4\pi i f_1 \int \bar{u}^{(2)} = \bar{B}^{(1)} + \int^2 \gamma_2$$

es folgt, mit $\bar{u}^{(2)''} = \frac{f_1}{d_1} \bar{B}^{(2)''} + i \frac{\bar{u}^{(1)''} - \gamma_1}{d_1 \int}$

$$\tau_0 \left(\frac{\bar{B}^{(2)''}}{\int}\right)'' - i d_1 \bar{B}^{(2)''} + 4\pi i f_1 \left(\frac{f_1}{d_1} \bar{B}^{(2)''} + i \frac{\bar{u}^{(1)''} - \gamma_1}{d_1 \int}\right) = \left(\frac{\bar{B}^{(1)}}{\int}\right)''$$

oder, mit $\bar{u}^{(1)} = \frac{f_1}{d_1} \bar{B}^{(1)}$:

$$\tau_0 \left(\frac{\bar{B}^{(2)''}}{\int}\right)'' - i \frac{d_1^2 - 4\pi f_1^2}{d_1} \bar{B}^{(2)''} = \frac{4\pi f_1^2}{d_1^2} \frac{\bar{B}^{(1)''}}{\int} - \frac{4\pi f_1}{d_1} \frac{\gamma_1}{\int} + \left(\frac{\bar{B}^{(1)}}{\int}\right)'' \equiv h$$

Der Zusatzterm $\frac{4\pi f_1}{d_1} \frac{\gamma_1}{\int}$ wirkt sich auf das Verhalten der Lösung für große $\int$ aus:

$$\bar{B}^{(2)''} = -i \frac{4\pi f_1}{d_1^2 - 4\pi f_1^2} \frac{\gamma_1}{\int} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\int^4}\right)$$

$$\longrightarrow \bar{B}^{(2)} = a^{\pm} \int - i \frac{4\pi f_1}{d_1^2 - 4\pi f_1^2} \gamma_1 \int \ln \int + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\int^2}\right) \qquad (\int \to \pm\infty)$$

Wir erhalten somit für $|\zeta| \to \infty$ einen logarithmisch anwachsenden Term

$$2\,\frac{4\pi f_1 f_2 - d_1 d_2}{4\pi f_1^2 - d_1^2}\,\gamma^{-2}\,\bar{B}^{(0)}\int \ln\zeta$$

der, unter Beachtung von $\bar{B}^{(0)} = b_0^{(0)}$ und $\gamma^2 = \frac{\tilde{\omega}^2}{\varepsilon^3}$ mit dem 2. Term in der hydromagnetischen Entwicklung von $B^{(0)}$ übereinstimmt, wodurch eine korrekte Überlappung gewährleistet ist.
Auf den Sprung der asymptotischen Ableitung $\Delta\bar{B}^{(2)}$ ist der Zusatzterm $\frac{4\pi f_1}{d_1}\gamma_1/\zeta$ ohne Einfluß, da $\int_{\Gamma_R^+} \frac{\gamma_1}{\zeta} = 0$

Damit gilt (I.4.20) und somit bleibt die Dispersionsbeziehung (I.6.1) unverändert.

(Die Konvergenz der verwendeten Entwicklungen (für $d_2, f_2 \neq 0$) und die Existenz eines gemeinsamen Konvergenzbereiches wurde bereits in C.III und D.I nachgewiesen).

b) Konstante Strömungsgeschwindigkeit in der Widerstandsschicht (D.II).

In diesem Fall ist $d_1 = 0$, d.h. der Koeffizient $\beta_1^{(0)}$ in der HME wird:

$$\beta_1^{(0)} = 2\,\frac{f_2}{f_1}\,\beta_0^{(0)}$$

In der Widerstandsschicht erhalten wir statt (D.II.3.3) und (D.II.3.8):

$$\frac{\omega}{\varepsilon}\,u'' + i\varepsilon d_2 \int^2 u'' - 2i\varepsilon d_2\, u = i f_1 \int \mathfrak{B}'' + i\varepsilon f_2 \int^2 \mathfrak{B}'' - 2i\varepsilon f_2 \mathfrak{B}$$

$$\tau_0\,\varepsilon^{-1/2}\,\mathfrak{B}'' = \frac{\omega}{\varepsilon}\,\mathfrak{B} + i\varepsilon d_2 \int^2 \mathfrak{B} - 4\pi i f_1 \int u - 4\pi i \varepsilon f_2 \int^2 u$$

Als Lösungen:

$$\bar{u}^{(0)} \equiv 0$$

$$\bar{\mathfrak{B}}^{(0)} \equiv \beta_0^{(0)}$$

$$\bar{\mathfrak{B}}^{(1)} \equiv 0 \qquad \text{(unverändert)}$$

$$\bar{u}^{(1)\,\prime\prime} = i f_1 \int \bar{\mathfrak{B}}^{(2)\,\prime\prime} - 2i f_2\, \beta_0^{(0)}$$

$$\lambda\,\bar{\mathfrak{B}}^{(2)\,\prime\prime} = \beta_0^{(0)} - 4\pi i f_1 \int \bar{u}^{(1)}$$

$$\bar{u}^{(1)\prime\prime} = 4\pi f_1^2 \lambda^{-1} \int^2 \bar{u}^{(1)} = i f_1 \int \lambda^{-1} \beta_0^{(0)} - 2i f_2\, \beta_0^{(0)}$$

Diese Gleichung hat eine reguläre Lösung mit dem asymptotischen Verhalten

$$\bar{u}^{(1)} \sim \frac{\beta_0^{(0)}}{4\pi i f_1}\,\frac{1}{\int} + \frac{f_2\,\beta_0^{(0)}\,\lambda}{2\pi i f_1^2}\,\frac{1}{\int^2} + O\!\left(\frac{1}{\int^5}\right) \qquad \left(|\int| \to \infty,\ \operatorname{Im}\int = 0\right)$$

Hieraus folgt für das asymptotische Verhalten von $\bar{\mathfrak{B}}^{(2)}$:

$$\bar{\mathfrak{B}}^{(2)} = a^{\pm} \int + \frac{2 f_2}{f_1}\,\beta_0^{(0)} \int \ln \int + O\!\left(\frac{1}{\int^2}\right)$$

Der logarithmische Term stimmt wieder mit dem entsprechenden in der HME überein.
Der Sprung der asymptotischen Ableitung $\Delta \bar{B}^{(2)'}$ bleibt unverändert und damit auch die Dispersionsbeziehung.
Die glm. Konvergenz der Näherung im ganzen Intervall wurde bereits nach C.III. und D.II. nachgewiesen.

Anhang II

Airy-Gleichung

Die Lösungen der Airy-Gleichung (D.I.4.6) können bekanntlich als Laplace-Integral geschrieben werden:

$$Ai_\nu(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_\nu} \exp(\eta t - t^3/3)\, dt \qquad \nu = 1,2,3 \ ,$$

wobei die Integrationskonturen T_ν in Sektoren mit $\mathrm{Re}\, t^3 > 0$ (schraffiert in Abb. 12) ins Unendliche gehen.
Jede der dadurch definierten drei Lösungen Ai_ν , von denen jeweils zwei linear unabhängig sind, hat für $|\eta| \to \infty$ im Sektor S_ν exponentiell abnehmendes Verhalten (subdominant) in den Sektoren $S_\mu^{(\mu \neq \nu)}$ exponentiell zunehmendes Verhalten (dominant). An den Antistokeslinien T_i ändert sich jeweils das Verhalten. Auf Wegen W_1 bzw. W_2 die in S_1 bzw. S_2 gegen Unendlich gehen, existieren die Integrale

$$\int_{\infty(W_1)}^{\eta} Ai_1(\eta')\, d\eta' \quad , \quad \int_{\infty(W_2)}^{\eta} Ai_2(\eta')\, d\eta'$$

und die nach der Methode der Variation der Konstanten gebildete Lösung der inhomogenen Gleichung

(A) $w'' - \eta \cdot w = 1$ konvergiert und hat die Form

$$w = \frac{1}{W}\left[Ai_2(\eta) \int_{\infty(W_1)}^{\eta} Ai_1(\eta')\, d\eta' - Ai_1(\eta) \int_{\infty(W_2)}^{\eta} Ai_2(\eta')\, d\eta' \right]$$

(W = Wronskideterminante von Ai_1 , Ai_2)

(siehe hierzu [11] , [12]).

Die inhomogene Lösung w kann in $S_1 \cup S_2$ für große $|\eta|$ entwickelt werden, wobei sich - wie die Differentialgleichung (A) formal zeigt - ergibt:

$$w = -\frac{1}{\eta} + O\left(\frac{1}{\eta^4}\right)$$

In S_3 , wo Ai_1 und Ai_2 beide exponentiell zunehmen, ist auch w exponentiell zunehmend (siehe [11]).
Für das Verhalten am Nullpunkt gilt([11] , S.291 mit $Q_3 = -w$):
$w(0) = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} Ai_1(0)\, e^{\pi i/3} \neq 0$, ferner folgt aus (A):
$w''(0) = 1$.

Anhang III

Numerische Auswertung der Stabilitätsgrenze für verschiedene Strömungsprofile.

Das marginale $k_0^{(0)}$ (Stabilitätsgrenze für $\eta_0 \to 0$) erhalten wir als Eigenwert der Gleichung (C I.3.1, 2) mit $\omega = \frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\eta_0 = 0$, d.h. einer Gleichung vom Typ $H_0(k_0^{(0)})\,\psi = 0$, wobei $H_0(k^{(0)}) \equiv -\frac{d^2}{dz^2} + k_0^{(0)2} + V_0(z)$ (D I.7, D I. 6)

Zur numerischen Auswertung suchen wir diejenigen $k_0^{(0)}$ für die das Anfangswertproblem $\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} = H_0(k_0^{(0)})\psi$, $\psi = \psi_0(z)\big|_{t=0}$ bei $t \to \infty$ zu stationären Lösungen führt. Als Randbedingung haben wir $\psi = 0\big|_{z=\pm 2.5}$. Für das Magnetfeld wählen wir den Standardfall $B_0(z) \equiv \tanh z$, für die Dichte $\varrho_0(z) \equiv 1$ und für die Strömungsgeschwindigkeit $v_0(z)$ die in D.I.7, D.II.6 diskutierten Fälle.

Wir geben jeweils den Verlauf von $v_0(z)$ und der "potentiellen Energie" $V_0(z)$ an (im Bezugssystem der Störung). Es sei bemerkt, daß $k_0^{(0)}$ allein von der dimensionslosen Größe $h_0^2(z) = \frac{v_{\text{Strömung}}^2}{v_{\text{Alfvén}}^2}$ abhängt.

Die Stabilitätsgrenze $k_0^{(0)}$ wird in Abhängigkeit von $\beta \equiv \max_{-2.5 \le z \le 2.5} h_0^2(z)$ berechnet, wobei $\beta = 0$ dem strömungslosen Fall entspricht, $\beta = 1$ der (lokalen) Gleichheit von $v^2_{\text{Alfvén}}$ und $v^2_{\text{Strömung}}$ im Bezugssystem der Störung.

I. Strömungsgradient in der Widerstandsschicht:

1) $h_0(z) \sim \exp(-z^2)$ (nach außen abfallend) (Abb.13)

Stabilisierung: der Bereich instabiler k wird verkleinert und verschwindet ganz für $\beta \approx 0.8$

2) $\widetilde{D}_0 = k v_0 - i\omega_0^{(0)} \sim z$ d.h. $v_0 \sim z + \text{const}$ und $h_0 \sim B_0(z) \cdot z$ (lineare Strömung) (Abb.14):

Destabilisierung.

II. Konstante Strömung in der Widerstandsschicht:

1) $h_0(z) \sim z$ (Abb.15):

Destabilisierung.

2) $\widetilde{D}_o(z) \sim z^2$, d.h. $v_o \sim z^2 + \text{const.}$ und $h_o \sim \widetilde{B}_o^{-1}(z) \cdot z^2$
(parabolische Strömung, Poiseuilleströmung, Abb.16):
schwache Destabilisierung.

Abb. 1 Magnetfeld für das Gleichgewicht und für die Tearing-Instabilität.

Abb. 2 Singuläre Stellen der reibungslosen Störungsgleichungen in der komplexen z-Ebene (n Ordnung der Nullstelle)

Abb. 3 Singuläre Stellen der idealen Störungsgleichungen ($v_0 = \eta_0 = 0$)
a) $|D_0'(z_0)/F_0'| < |F_0'(z_0)|$ ($B(z_0) \neq 0$)
b) $|D_0'(z_0)/F_0'| > |F_0'(z_0)|$ "
c) " ($B(z_0) = 0$)

Abb. 4 Singuläre Stellen für durch Magnetfeld modifizierte HD-Moden

Abb. 5 Singuläre Stellen für durch Strömung modifizierte MHD-Moden

Abb. 6 Integrationskontur für Tearing-Moden im (idealen) hydromagnetischen Bereich.

Abb. 7 Singuläre Stellen bei einem Tearing-Mode für konstante Strömung in der Widerstandsschicht.

Abb. 8 Magnetfeld (B_0), Strömung (v_0) und h_0 für lineares h_0

Abb. 9 Integrationsweg Γ_{ab} für die Lösung der marginalen Störungsgleichung (zu Abb.8)

Abb. 10 Zusatzpotential $S_0^{(2)}$ durch Strömung (zu Abb.8)

Abb. 11 Zusatzpotential $S_0^{(1)}$ durch Strömung (zu Abb.8) (auf Γ_{ab})

Abb. 12 Integrationskonturen (Γ_i) und Antistokeslinien (T_i) für die Airyfunktionen in der komplexen η -Ebene

Abb. 13 - 16 Alfvéngeschwindigkeit, Strömungsgeschwindigkeit und "Potential" ($V_0(z)$) für typische Profile. Abhängigkeit der Stabilitätsgrenze von $\beta \equiv \max_{-25 \leq z \leq 25} h_0^2(z)$ $\left(\sim \frac{v_{Strömung}^2}{v_{Alphén}^2} \right)$ für jedes Profil.

Abb.1

Abb.2

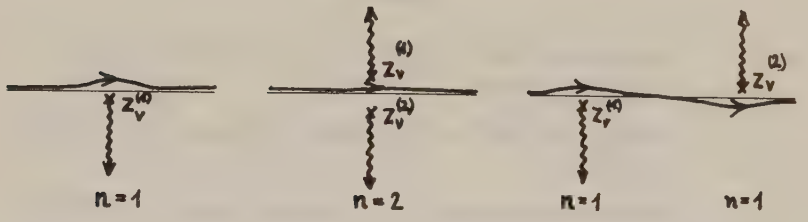


Abb.3

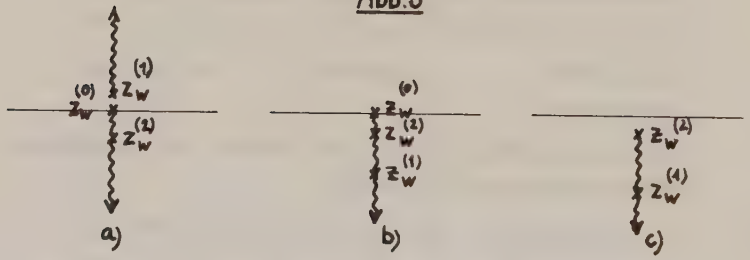


Abb.4

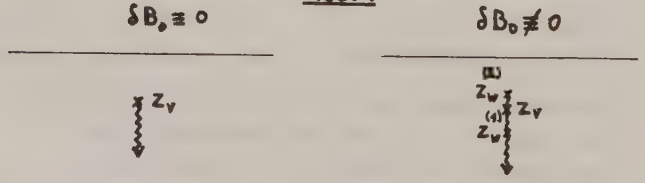


Abb.5

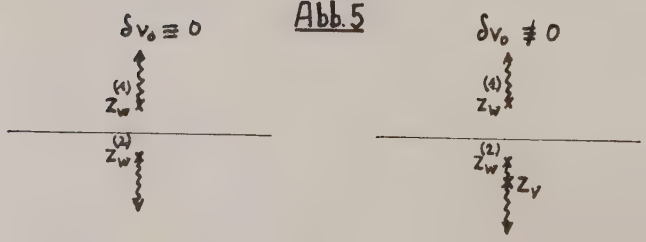


Abb. 6

Abb. 7

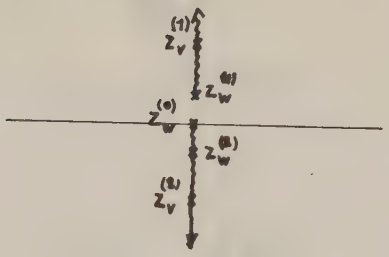


Abb. 8

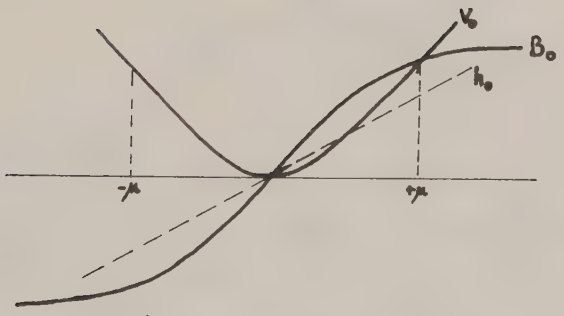


Abb. 9

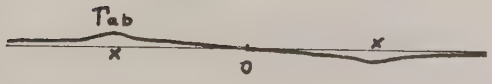


Abb. 10

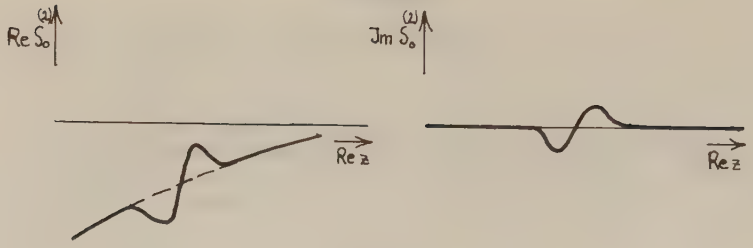


Abb. 11

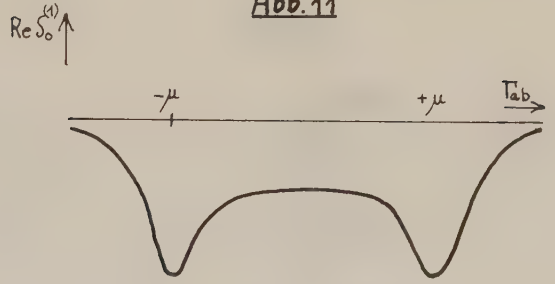


Abb. 12

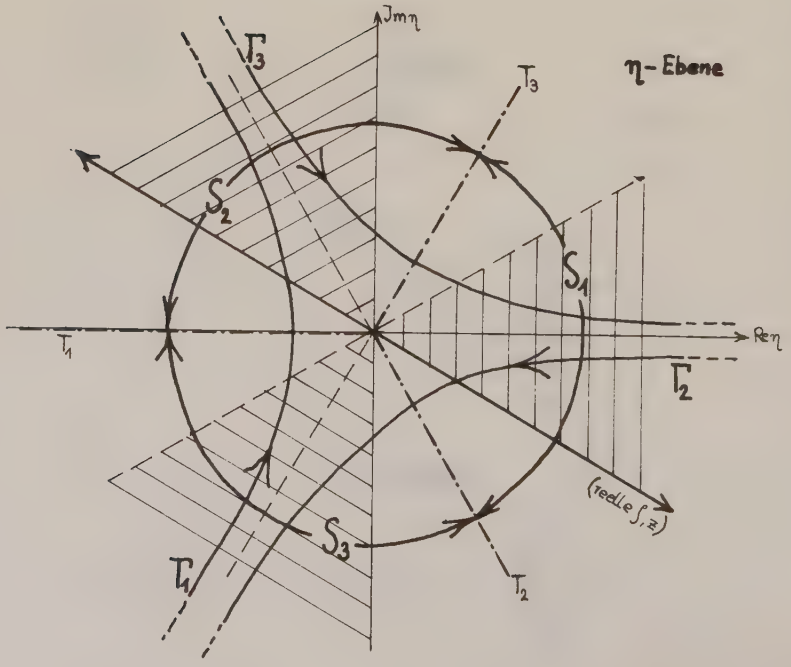
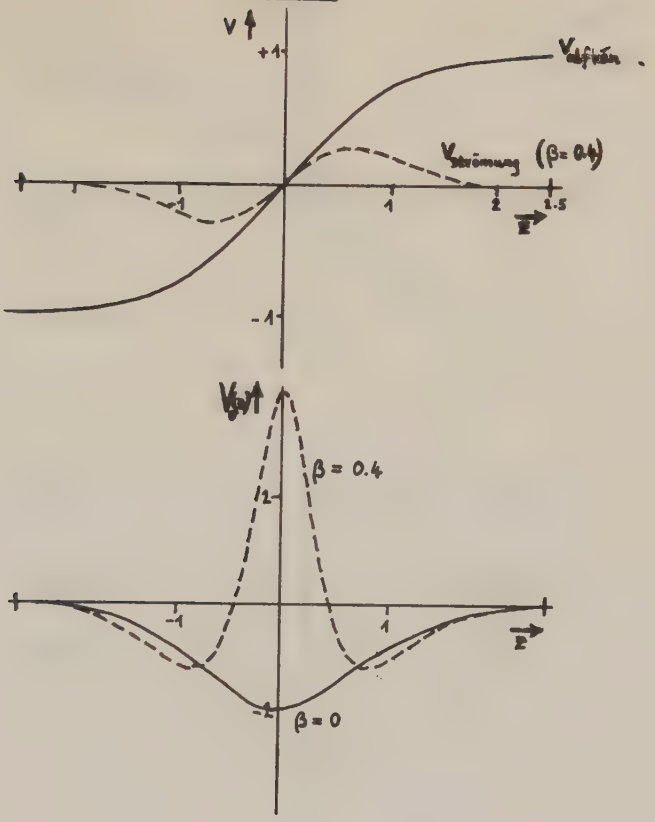


Abb. 13


v
+1
-1
$V_{diffüs}$
$V_{Strömung}$ (β= 0.4)
-1
1
2
1.5
z
V_{ges}
β = 0.4
2
-1
1
z
-2
β = 0

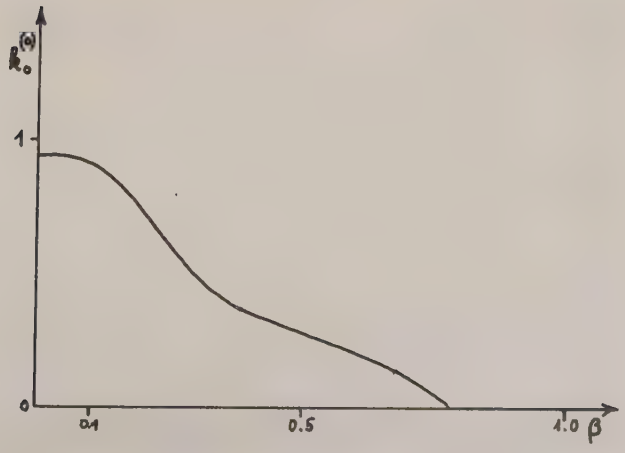

$k_o^{(a)}$
1
0
0.1
0.5
1.0
β

Abb. 14

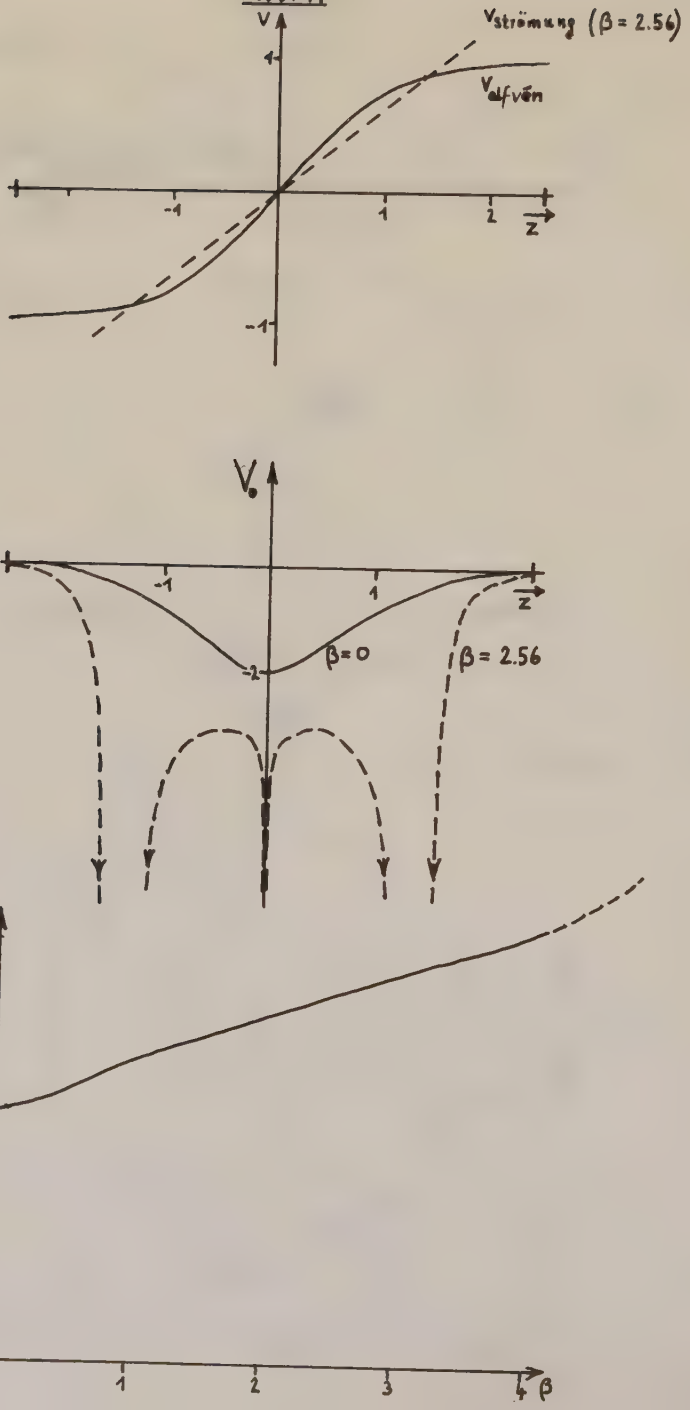
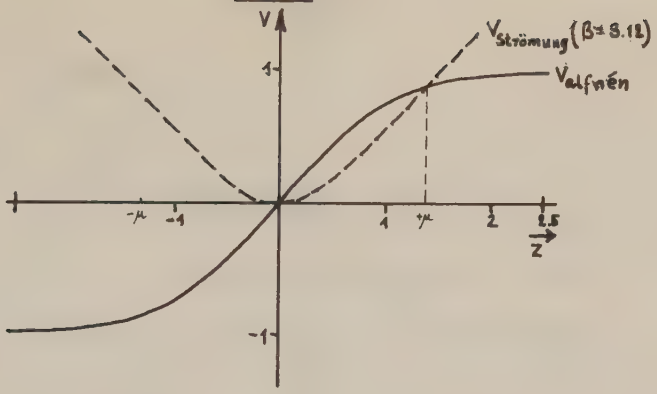
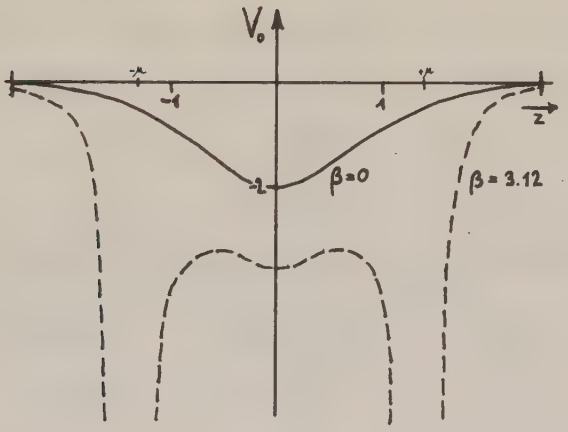

V
$V_{Strömung}$ (β = 2.56)
$V_{Alfvén}$
1
-1
1
2
z
-1
V_ϕ
-1
1
z
-2
β=0
β = 2.56
$k_\phi^{(c)}$
1,5
1
1
2
3
4
β

Abb. 15


V
1
$V_{Strömung}(\beta = 3.12)$
$V_{Alfvén}$
$-\mu$
-1
1
μ
2
2.5
z
-1


V_0
$-\mu$
-1
1
μ
z
-2
$\beta = 0$
$\beta = 3.12$

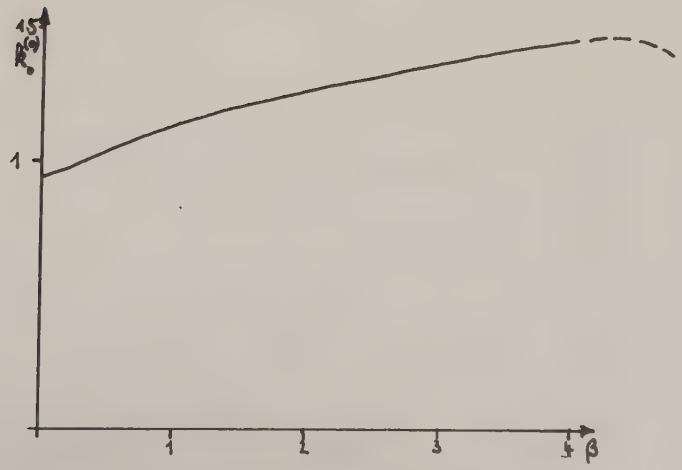
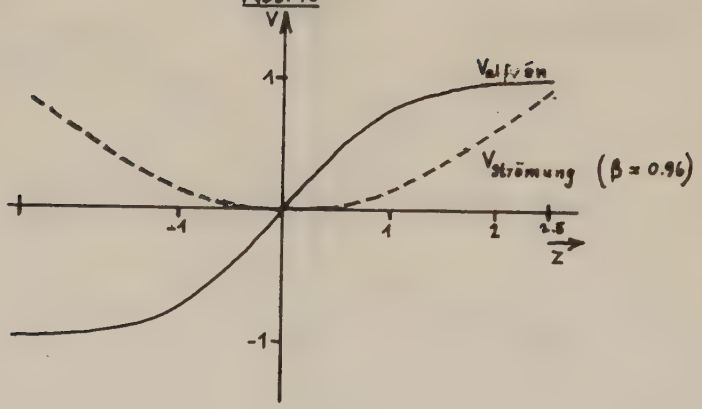
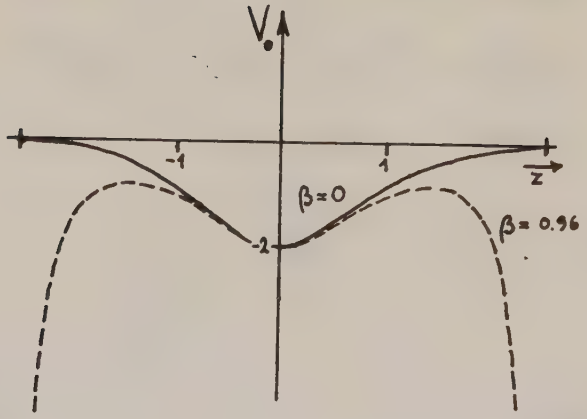
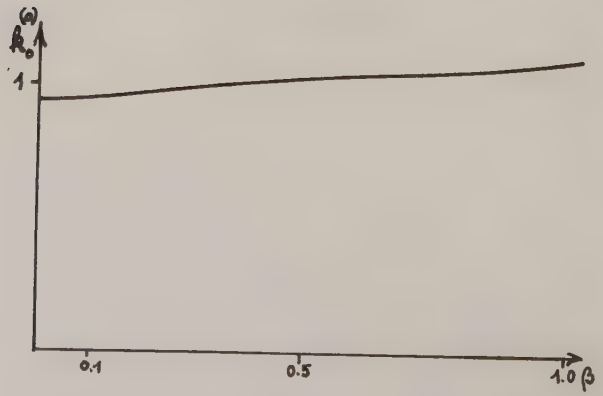

R_0
1.5
1
1
2
3
4
β

Abb. 16


V
1
-1
1
2
2.5
z
V Wirbel
V Strömung
(β = 0.96)


V₀
-1
1
z
β=0
β= 0.96
-2


(ω)
R₀
1
0.1
0.5
1.0 β

Lebenslauf

Am 30.8.1943 wurde ich, Ingo Hofmann, als Sohn des Kaufmanns Gerhard Hofmann und seiner Ehefrau Therese, geborene Weinbacher, in Senftenberg/Niederlausitz geboren. Die Volksschule besuchte ich in Bad Aibling/Oberbayern, die Oberrealschule anfänglich in Rosenheim, dann in München bis zum Abitur im Jahre 1962. An der Universität München begann ich im gleichen Jahr das Studium der Physik, legte im Sommersemester 1965 das Vordiplom und im Wintersemester 1968 das Hauptdiplom ab. Seit Dezember 1968 bin ich am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik tätig, zunächst als Stipendiat bis Januar 1972, seitdem als wissenschaftlicher Angestellter.